MC-Fragen Serie 11

Einsendeschluss: 17.5.2021, 10:00

---

1. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ hat eine Jordan-Normalform ...

(a) ... über $\mathbb{Q}$.

√ (b) ... über $\mathbb{R}$.

√ (c) ... über $\mathbb{C}$.

(d) für keine dieser drei Körper.

Eine Matrix hat eine Jordan-Normalform, falls das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, (äquivalent, wenn die Matrix trigonalisierbar ist). In diesem Fall ist $p_A(x) = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ und die Matrix ist sogar diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, und somit zerfällt p_A nicht in Linearfaktoren über $\mathbb{Q}$.

2. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -3\mathrm{i} \\ -3\mathrm{i} & 6 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $\mathrm{char}_A(X) = (X-3)^2$, also ist die algebraische Vielfachheit von $\lambda = 3$ zwei. Man berechnet

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3\mathrm{i} \\ -3\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - \mathrm{i}Z_1} \begin{pmatrix} -3 & -3\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist $\mathrm{Rang}(A - 3I_2) = 1$. Insbesondere ist also die geometrische Vielfachheit $\dim(E_3(A)) = 1 < 2$, und folglich ist A nicht diagonalisierbar.

3. Sei V ein K-Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Falls $\dim(V) < \infty$, dann besitzt T eine Jordan Normalform.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium ist, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Als gegenbeispiel betrachte die Rotationsmatrix $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{smallmatrix}\right)$. Wenn der Endomorphismus $L_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ eine Jordan Normalform besitzt, dann besitzt L_A einen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2$. Da das charakteristische Polynom von A keine reellen Nullstellen besitzt, hat L_A aber keinen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2$. Wenn der Körper $\mathbb{K}$ *algebraisch abgeschlossen* ist, d.h. wenn jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt, dann besitzt jeder Endomorphismus $T \in \mathrm{End}(V)$ eine Jordan Normalform. Dies gilt beispielsweise für $K = \mathbb{C}$.

4. Wenn eine lineare Abbildung genau n verschiedene Eigenwerte hat, dann hat ihre Jordan-Normalform genau n Jordan-Blöcke.

(a) Wahr.

(b) Wahr, aber nur falls eine Jordan-Normalform überhaupt existiert.

√ (c) Falsch.

Es kann viele Jordan-Blöcke zu einem Eigenwert geben.

5. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent und $v \in V$. Die Lebensdauer $\ell(v)$ ist die eindeutige Zahl, so dass $T^{\ell(v)+1}v = 0$, aber $T^{\ell(v)}v \neq 0$. Dann ist die Menge $\{v, Tv, T^2v, \dots, T^{\ell(v)}v\}$ linear unabhängig.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Das ist Lemma 9.2.21. im Skript.

6. Ein Element $v \in V$ ist ein *verallgemeinerter Eigenvektor* von $T \in \mathrm{End}(T)$, wenn in $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $v \in \mathrm{Ker}((T - \lambda I_n)^k)$ für ein $\lambda \in K$.

√ (a) Jeder Eigenvektor ist ein verallgemeinerter Eigenvektor.

(b) Jeder verallgemeinerte Eigenvektor ist ein Eigenvektor.

(c) Beide Aussagen sind falsch.

Ein Eigenvektor erfüllt genau $v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, also die Definition von verallgemeinertem Eigenvektor für $k = 1$. Wenn eine $n \times n$-Matrix nicht diagonalisierbar ist, hat sie dennoch n verallgemeinerte Eigenvektoren. Aus diesen Vektoren kann man eine Basis für die Jordan-Normalform machen.

7. Matrizen A, B die beide ähnlich sind zu einer Matrix J in Jordan-Normalform, sind ähnlich zueinander.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Es gibt $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$, mit $P^{-1}AP = J = Q^{-1}BQ$, also $(PQ^{-1})^{-1}APQ^{-1} = B$, wobei $PQ^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$.

8. Sei V endlichdimensional. Wenn $T, S \in \mathrm{End}(V)$ das gleiche charakteristische Polynom haben, $p_T = p_S$, dann haben T und S die gleiche Jordansche Normalform.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Matrizen I_2 und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ haben beide $p(x) = (x-1)^2$ als charakteristisches Polynom.

9. Sei V endlichdimensional. Wenn $T, S \in \mathrm{End}(V)$ das gleiche Minimal-Polynom haben, $M_T = M_S$, dann haben T und S die gleiche Jordansche Normalform.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Wir erinnern uns, dass das Minimalpolynom Minimal bezüglich allen Polynomen p ist, die den Satz von Cayley-Hamilton erfüllen, also $p(A) = 0$.

Die Matrizen 0 und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ haben unterschiedliche Minimalpolynome: $M_{I_2}(x) = x - 1$, $M_A(x) = (x-1)^2$. Das Minimalpolynom enthält somit mehr Information über die Matrix, als das charakteristische Polynom.

Aber es gibt auch Matrizen mit unterschiedlichen Jordan-Normalformen, die das gleiche Minimalpolynom haben. Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $M_A(x) = M_B(x) = (x-1)^3$. Zu einem Eigenwert detektiert das Minimalpolynom jeweils nur den grössten Jordanblock.

10. Wenn $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ die Eigenwerte $3, 5$ und 8 hat, dann gilt

$$(T - 3I_4)^2(T - 5I_4)^2(T - 8I_4)^2 = 0.$$

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Über $\mathbb{C}$ hat jeder Endomorphismus T eine Basis in der T Jordan-Normalform J hat. Auf den Diagonalen von J müssen die drei Eigenwerte vorkommen, somit kann ein Eigenwert höchstens zwei mal vorkommen und somit kann es hölchstens einen Jordan-Block der Grösse zwei geben. Alle diese Jordanblöcke werden durch $(T - \lambda I_4)^2$ Null.