D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2021
Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 12

Einsendeschluss: 24.5.2021, 10:00

---

1. Sei K ein beliebiger Körper. Jede Matrix in $M_{n\times n}(K)$ hat eine Jordan-Normalform.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Matrix muss trigonalisierbar sein.

2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper (d.h. jedes Polynom zerfällt in Linearfaktoren). Jede Matrix in $M_{n\times n}(K)$ hat eine Jordan-Normalform.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, dann ist Matrix trigonalisierbar und es gibt eine Jordan-Normalform.

3. Sei K ein beliebiger Körper. Jede nilpotente Matrix in $M_{n\times n}(K)$ hat eine Jordan-Normalform.

√ (a) Wahr.

√ (b) Wahr, falls die Matrix trigonalisierbar ist.

(c) Falsch.

A priori weiss man nicht, ob eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ trigonalisierbar ist, aber es gibt einen algebraisch abgeschlossenen Körper K' mit $K \subset K'$ über dem es eine Jordan-Normalform von A gibt. Wenn A nilpotent ist, sind alle Eigenwerte über K' gleich Null und man bekommt eine Jordan-Normalform mit Nullen auf der Diagonalen. Da $0 \in K \subset K'$, gilt diese Jordan-Normalform auch für K.

4. Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt

√ (a) $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$.

√ (b) $\exp(A^T) = \exp(A)^T$.

(c) $\exp(A^2) = \exp(A)^2$.

(d) Alles ist falsch.

Für (a) und (b) betrachten Sie die Definition

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

(c) gilt nicht mal für 1×1-Matrizen. Es stimmt jedoch, dass $\exp(2A) = \exp(A)^2$.

5. Für $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ gilt $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Aussage gilt nur, wenn A und B kommutieren.

6. Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gilt $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Betrachten Sie die Definition

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

7. Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper. Wir bemerken, dass es keine Exponentialfunktion $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ gibt, da wir keinen Begriff für Konvergenz von unendlichen Summen in $\mathbb{F}$ haben. Können wir das Matrix-Exponential

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

definieren?

(a) Ja, für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$.

(b) Ja, für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, die eine Jordan-Normalform haben.

√ (c) Ja, für alle nilpotenten $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$.

(d) Nur wenn $A = 0$ ist.

Für nilpotente Matrizen wird die unendliche Summe zu einer endlichen, da $A^n = 0$.

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}.$$

Für die Einheitsmatrix ist $\exp(I_n)$ in endlichen Körpern nicht definiert.

8. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

(a) $\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

(c) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & 2 \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

(d) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & 2 \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

√ (e) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

(f) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e-1 & e \\ 0 & e-1 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\exp(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

9. Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ gilt:

(a) $\exp(A) = \begin{pmatrix} 2 & e \\ e & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^2 & 1 \\ 1 & e^2 \end{pmatrix}$.

(c) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^2 & e \\ e & e^2 \end{pmatrix}$.

√ (d) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^2 \cos(1) & e^2 \sin(1) \\ e^2 \sin(1) & e^2 \cos(1) \end{pmatrix}$.

(e) $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^2 \sin(1) & e^2 \cos(1) \\ e^2 \cos(1) & e^2 \sin(1) \end{pmatrix}$.

Da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. In der Tat wir bekommen zwei Eigenvektoren, die wir in

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zusammenfassen können, um

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: D$$

zu bekommen. Wir bekommen

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp(P^{-1}DP) = P^{-1}\exp(D)P = P^{-1}\begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e+e^3}{2} & \frac{e^3-e}{2} \\ \frac{e^3-e}{2} & \frac{e+e^3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 \cos(1) & e^2 \sin(1) \\ e^2 \sin(1) & e^2 \cos(1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10. Die Haupträume der Matrisx

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllen:

(a) $\mathrm{Hau}(0, m_A) = \mathrm{Span}(e_1)$.

(b) $\mathrm{Hau}(1, m_A) = \mathrm{Span}(e_1)$.

√ (c) $\mathrm{Hau}(1, m_A) = \mathrm{Span}(e_1, e_2 + e_3)$.

(d) $\mathrm{Hau}(1, m_A) = \mathrm{Span}(e_1, 2e_2 + 3e_3)$.

√ (e) $\mathrm{Hau}(1, m_A) = \mathrm{Span}(e_1, 3e_2 + 2e_3)$.

√ (f) $\mathrm{Hau}(1, m_A) = \mathrm{Span}(5e_1 + 3e_2 + 2e_3, 3e_2 + 2e_3)$.

√ (g) $\mathrm{Hau}(-1, m_A) = \mathrm{Span}(e_2)$.

Null ist kein Eigenwert von A. Der Hauptraum ist definiert, als

$$\mathrm{Hau}(\lambda, m_A) = \mathrm{KerN^r},$$

wobei $N = A - \lambda I_n$ und r die Potenz von $(\lambda - x)$ im Minimalpolynom. Für den Eigenwert $\lambda = 1$ haben wir

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wir haben $\mathrm{Hau}(1, m_A) = \mathrm{Ker}(N^2)$.