MC-Fragen Serie 13

Einsendeschluss: 31.5.2021, 10:00

---

1. Der Dualraum $V^\star$ hat die gleiche Dimension wie der Vektorraum V.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Diese Aussage stimmt für endlichdimensionale-Vektorräume.

2. Sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis eines Vektorraumes V und $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Sei $f \in K^I$ definiert durch die konstante Funktion

$$f(i) = 1$$

(a) Dann ist $\mathrm{supp}(f) = \mathcal{B}$.

√ (b) Dann ist $\mathrm{supp}(f) = I$.

(c) Dann ist $\mathrm{supp}(f) = V$.

(d) Dann ist $\mathrm{supp}(f) = \emptyset$.

3. Seien V, W endlichdimensional. Welche Vektorräume sind auf natürliche Art isomorph?

(a) $V \cong V^\star$.

√ (b) $V \cong V^{\star\star}$.

(c) $M_{n\times n}(K) \cong K^{n^2}$.

√ (d) $\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(W^\star, V^\star)$.

Wir haben zwar nicht formal definiert, was natürlich heisst, aber die Idee ist, dass zwei Isomorphismen natürlich isomorph sind, wenn es einen Isomorphismus gibt, für dessen Definition es nicht draufankommt welche Basis man wählt.

4. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis eines Vektorraums. Dann ist die duale Basis $\mathcal{B}^\star$ eine Basis des Dualraums $V^\star$.

(a) Das stimmt immer.

√ (b) Das stimmt, falls V endlichdimensional ist.

(c) Das stimmt, falls die Dimension von V abzählbar ist.

(d) Das stimmt gar nie.

5. Es seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei Basen eines endlichdimensionalen K-Vektorraums, die sich nur in einem Element unterscheiden. Dann unterscheiden sich die dualen Basen $\mathcal{B}^\star$ und $\mathcal{C}^\star$ ebenfalls nur in einem Element.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Siehe 2(b) auf Serie 13.

6. Die duale Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V^\star\to K$ definiert durch $\langle v,\varphi\rangle=\varphi(v)$ ist eine Bilinearform.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Laut der Definition im Kapitel 8 ist eine Bilinearform ist immer von der Form $V\times V\to K$, die beiden Inputs müssen aus dem gleichen Vektorraum kommen. Nach dieser Definition wäre die duale Paarung keine Bilinearform, obwhol sie linear in beiden Einträgen ist.

Im Kapitel über Dualräume und multilinearer Algebra lassen wir aber die allgemeinere Definition $V_1\times V_2\to K$ für Bilinearformen zu (wobei V_1 und V_2 verschiedene Vektorräume sind. Dies ist konsistent mit multilinearen Abbildungen, die auch von verschiedenen Vektorräumen nach K gehen.

7. Wenn $\{e_i\}_{i\in I}$ eine Basis von V ist, dann ist $(\mathrm{ev}_{e_i})_{i\in I}$ eine Basis von $V^{\star\star}$.

(a) Das stimmt für jeden Vektorraum V.

√ (b) Das stimmt für endlichdimensionale Vektorräume.

(c) Das stimmt nie.

Es gibt unendlichdimensionale Vektorräume V, mit $V^{\star\star}$ nicht isomorph to V.

8. Sei W ein Untervektorraum von V. Welche Aussagen über den Annulator sind wahr?

√ (a) $W^0\subseteq V^\star$.

(b) $\forall\varphi\in W^0, v\in V\colon \varphi(v)\in W$.

(c) $\forall\varphi\in W^0, w\in W\colon \varphi(w)\in W$.

(d) $\forall\varphi\in W^0, v\in V\colon \varphi(v)=0$.

√ (e) $\forall\varphi\in W^0, w\in W\colon \varphi(w)=0$.

Die Aussagen (b) und (c) können nicht wahr sein, da $\varphi(v),\varphi(w)\in K$. Selbst wenn $\varphi(w)=0_K$ ist, und $0_W\in W$, gilt aber nicht $0_K=0_W$, und somit ist $0_K\notin W$.

9. Sei $W \subseteq K^n_{\text{Spalten}}$. Für jedes $w \in W$ ist $w^T \in W^0 \subseteq V^\star = K^n_{\text{Zeilen}}$.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Nein, in der Standardbasis ist zum Beispiel $e_1^T(e_1) = 1 \neq 0$, also ist $e_1^T \notin (\mathrm{Sp}(e_1))^0$. Stattdessen sollte man sich W^0 eher wie das Komplement vorstellen.

10. Sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ die Standardbasis von K^5 und sei $W = \mathrm{Sp}(e_1, e_2 + e_3)$.

(a) Dann ist $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \in W^0$.

$\surd$ (b) Dann ist $(0 \quad 1 \quad -1 \quad 3 \quad 2) \in W^0$.

(c) Dann ist $(3 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0) \in W^0$.

$\surd$ (d) Dann ist $\varphi\colon \sum_{i=1}^5 \lambda_i e_i \mapsto \lambda_3 - \lambda_2 \in W^0$.

(e) Dann ist $\varphi\colon \sum_{i=1}^5 \lambda_i e_i \mapsto \lambda_4 \cdot \lambda_5 \in W^0$.

Die letzte Abbildung ist nicht linear.