MC-Fragen Serie 14

Einsendeschluss: 7.6.2021, 10:00

---

1. Seien $V = V_1 \times \ldots \times V_k$ und W K-Vektorräume, $k \geq 2$.

(a) Für jeden Körper K gilt: Jede lineare Abbildung $V \to W$ ist eine k-multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_k \to W$.

(b) Für jeden Körper K gilt: Jede k-multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_k \to W$ ist auch eine lineare Abbildung $V \to W$.

(c) Es gibt Körper K und $k \geq 2$, so dass jede lineare Abbildung $V \to W$ auch eine eine k-multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_k \to W$ ist.

(d) Es gibt Körper K und $k \geq 2$, so dass jede k-multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_k \to W$ auch eine lineare Abbildung $V \to W$ ist.

$\checkmark$ (e) Alle obigen Aussagen sind falsch.

Wir betrachten $k = 2$ und $V_1 = V_2 = K = W$. Eine lineare Abbildung ist gegeben durch die Projektion $T\colon V \to W, T(v, w) = v$. Wir sehen, dass T nicht multilinear ist, da für $\lambda = 0$ gilt

$$T(1, \lambda 1) = 1 \neq 0 = \lambda T(1, 1).$$

Eine multilineare Abbildung $\varphi\colon V_1 \times V_2 \to W$ ist gegeben durch $\varphi(v, w) = vw$. Diese ist wegen

$$\varphi((1, 0) + (0, 1)) = \varphi((1, 1)) = 1 \neq 0 = \varphi((1, 0)) + \varphi((0, 1))$$

jedoch nicht linear.

Das gleiche Prinzip funktioniert auch für $k \geq 3$.

2. Sei $\dim(V) = 2$, $\dim(W) = 3$. Dann gilt $\dim \mathrm{Mult}(V, V^\star; \mathrm{Hom}(V, W)) =$

(a) 6

(b) 9

(c) 12

(d) 18

√ (e) 24

Es gilt $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W = 2 \cdot 3 = 6$. Insgesammt gilt $\dim \mathrm{Mult}_K(V, V^\star; \mathrm{Hom}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(V^\star) \cdot \dim \mathrm{Hom}(V, W) = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$.

3. Sei $\dim(V) = 2$, $\dim(W) = 3$. Dann gilt $\dim \mathrm{Sym}^2(V, \mathrm{Hom}(V, W)) =$

(a) 6

(b) 9

(c) 12

√ (d) 18

(e) 24

Es gilt $\dim \mathrm{Sym}^k(V, W) = \binom{\dim V + k - 1}{k} \cdot \dim W$, also $\dim \mathrm{Sym}^2(V, \mathrm{Hom}(V, W)) = \binom{3}{2} \cdot 6 = 18$.

4. Sei $\dim(V) = 2$, $\dim(W) = 3$. Dann gilt $\dim \mathrm{Alt}^2(V, \mathrm{Hom}(V, W)) =$

√ (a) 6

(b) 9

(c) 12

(d) 18

(e) 24

Es gilt $\dim \mathrm{Alt}^k(V, W) = \binom{\dim V}{k} \cdot \dim W$, wenn $k \leq \dim V$. Insgesammt gilt $\dim \mathrm{Alt}^2(V, \mathrm{Hom}(V, W)) = \binom{2}{2} \cdot 6 = 6$.

5. Sei $A \in M_{2\times 2}(K)$ und $\varphi\colon K^n \times K^n \to K$ die multilineare Abbildung definiert durch $\varphi(v,w) = v^T A w$.

√ (a) Wenn A symmetrisch ($A = A^T$) ist, dann ist φ eine symmetrische Bilinearform.

(b) Wenn A symmetrisch ($A = A^T$) ist, dann ist φ eine alternierende Bilinearform.

(c) Wenn A antisymmetrisch ist ($A^T = -A$), dann ist φ eine symmetrische Bilinearform.

√ (d) Wenn A antisymmetrisch ist ($A^T = -A$), dann ist φ eine alternierende Bilinearform.

√ (e) Wenn A antisymmetrisch ist ($A^T = -A$), dann ist φ eine antisymmetrische Bilinearform.

Symmetrisch heisst, dass $\varphi(v_1, v_2) = \varphi(v_2, v_1)$ gelten muss. Damit das stimmt muss $A_{ij} = A_{ji}$ gelten.

Alternierend impliziert, dass wenn $v_1 = v_2$ gilt, dann $\varphi(v_1, v_2) = \varphi(v_1, v_1) = 0$. Dies ist für antisymmetrische Matrizen erfüllt.

Alternierend impliziert antisymmetrisch.

6. Sei V ein 2-dimensionaler Vektorraum. Die Abbildung

$$\begin{aligned} V^4 &\to V^2 \\ (v_1, v_2, v_3, v_4) &\mapsto \det(v_1, v_2) \cdot (v_3, v_4) \end{aligned}$$

ist ...

√ (a) ... wohldefiniert.

√ (b) ... multilinear.

(c) ... linear.

(d) ... symmetrisch.

(e) ... alternierend.

7. Die kanonische duale Paarung

$$\begin{aligned} V \times V^\star &\to K \\ (v, \varphi) &\mapsto \varphi(v) \end{aligned}$$

ist ...

√ (a) ... wohldefiniert.

√ (b) ... multilinear.

(c) ... linear.

(d) ... symmetrisch.

(e) ... alternierend.

Die Abbildung kann gar nicht symmetrisch oder alternierend sein, da $V \neq V^\star$.

8. Welche Aussagen gelten für alle Multilinearformen?

$\surd$ (a) alternierend $\Rightarrow$ antisymmetrisch.

(b) antisymmetrisch $\Rightarrow$ alternierend.

(c) Keine der beiden Aussagen.

Dies ist eine Übung in der Serie.

9. Es gibt Körper K in denen

$\surd$ (a) antisymmetrisch $\Leftrightarrow$ alternierend.

$\surd$ (b) antisymmetrisch $\Leftrightarrow$ symmetrisch.

$\surd$ (c) alternierend $\Leftrightarrow$ symmetrisch.

$\surd$ (d) keine der obigen Aussagen gilt.

Wenn $1+1=0$, dann sind die Begriffe symmetrisch, alternierend und antisymmetrisch äquivalent. Im Allgemeinen sind das aber drei verschiedene Konzepte, also gilt keine der obigen Aussagen.