MC-Fragen Serie 15

Einsendeschluss: 14.6.2021, 10:00

---

1. Jedes Element von $V \otimes W$ kann als $v \otimes w$ mit $v \in V, w \in W$ geschrieben werden.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch

Diese Elemente heissen reine Tensoren. Nicht jeder Tensor ist ein reiner Tensor.

2. Was kann man über die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\psi\colon V^\star \otimes V &\to K\\ \varphi \otimes v &\mapsto \varphi(v)\end{aligned}$$

sagen?

√ (a) ψ ist eine multilineare Abbildung.

(b) ψ ist ein Isomorphismus.

√ (c) Falls V und W Dimension 1 haben, dann ist ψ injektiv.

(d) Diese Abbildung ist im Allgemeinen nicht mal wohldefiniert.

Eine lineare Abbildung ist auch 1-multilinear. Es gilt $\dim(V^\star \otimes V) = \dim(V)^2$ und daher kann ψ im Allgemeinen kein Isomorphismus sein. Wenn $\dim(V) = 1$ ist ψ ein Isomorphismus und somit auch injektiv.

Zur Wohldefiniertheit. Für $\varphi \in V^\star, v \in V$ ist $\varphi \otimes v$ ein reiner Tensor. Ein allgemeines Element aus $V^\star \otimes V$ ist eine Linearkombination aus reinen Tensoren. Somit ist nicht jedes Element in $V^\star \otimes V$ von der Form $\varphi \otimes v$. Es reicht jedoch eine lineare Abbildung auf einer Basis zu definieren und es gibt eine Basis bestehend aus reinen Tensoren.

3. Sei $\dim(V) = 2$, $\dim(W) = 3$. Dann gilt $\dim V \otimes V^\star \otimes \mathrm{Hom}_K(V, W) =$

(a) 6

(b) 9

(c) 12

(d) 18

√ (e) 24

Für das Tensorprodukt gilt für alle endlichdimensionalen Vektorräume $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$. Es gilt $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = 2 \cdot 3 = 6$. Insgesammt gilt $\dim \mathrm{Mult}_K(V, V^\star; \mathrm{Hom}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(V^\star) \cdot \dim \mathrm{Hom}(V, W)$.

4. Sei $u \in U, v \in V$. Wenn $u = 0$ oder $v = 0$, dann gilt $u \otimes v = 0 \in U \otimes V$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wenn $u = 0$, dann gilt für $\lambda = 0$

$$u \otimes v = (\lambda u) \otimes v = \lambda(u \otimes v) = 0.$$

Für $v = 0$ und $\lambda = 0$ haben wir ebenso:

$$u \otimes v = u \otimes (\lambda v) = \lambda(u \otimes v) = 0.$$

5. Welche der folgenden Elemente im Tensorprodukt $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ sind reine Tensoren?

√ (a) $\binom{1}{1} \otimes \binom{0}{1}$

√ (b) $\binom{1}{1} \otimes \binom{3}{6} + \binom{3}{3} \otimes \binom{1}{2}$

(c) $\binom{1}{1} \otimes \binom{3}{6} + \binom{3}{3} \otimes \binom{1}{2} + \binom{1}{2} \otimes \binom{1}{1}$

Der zweite Tensor ist gleich $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Um zu zeigen, dass (c) kein reiner Tensor ist, wählen wir die Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dann ist (c) $= 6e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$. Ein reiner Tensor hat im allgemeinen die Form

$$(ae_1 + be_2) \otimes (ce_1 + de_2) = ace_1 \otimes e_1 + ade_1 \otimes e_2 + bce_2 \otimes e_1 + bde_2 \otimes e_2,$$

in diesem Fall muss also $ac = 0, ad = 6$ und $bc = 1$ gelten. Aus der ersten Gleichung folgt, dass a oder c Null sein müssen, aber das kann wegen den mittleren zwei Aussagen nicht gelten. Also ist (c) kein reiner Tensor.

6. Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume und $v, w \in V$. Welche Aussagen sind wahr?

√ (a) $W \otimes V \cong V \otimes W$.

(b) $v \otimes w = w \otimes v$.

√ (c) $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$

(d) Weder noch.

Es gibt natürliche Isomorphismen $W \otimes V \cong V \otimes W$ und $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$ (siehe Serie 15). Wenn $v \neq w$ darf man aber nicht die Vekotoren vertauschen.

7. Sei $S = \{a, b\}$. Für den freien Vektorraum $F(S)$ über $K = \mathbb{Q}$ gilt

√ (a) $F(S)$ ist zweidimensional.

√ (b) $a + 3b \in F(S)$.

(c) $a^2 \in F(S)$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

Der freie Vektorraum besteht aus (endlichen) K-Linearkombinationen von Elementen aus S. Die Elemente in S versteht man als Vektoren. Man darf nicht Vektoren miteinander multiplizieren.

8. Sei das Tensorprodukt durch $\iota\colon U \times V \to U \otimes V$ gegeben.
Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes besagt, dass ...

$\checkmark$ (a) Für jeden Vektorraum W und jede bilineare Abbildung $f\colon U \times V \to W$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\overline{f}\colon U \otimes V \to W$, so dass $\overline{f} \circ \iota = f$.

(b) Für jeden Vektorraum W und jede lineare Abbildung $f\colon U \times V \to W$ gibt es eine eindeutige bilineare Abbildung $\overline{f}\colon U \otimes V \to W$, so dass $\overline{f} \circ \iota = f$.

(c) Für jeden Vektorraum W und jede lineare Abbildung $f\colon U \otimes V \to W$ gibt es eine eindeutige bilineare Abbildung $\overline{f}\colon U \times V \to W$, so dass $f \circ \iota = \overline{f}$.

(d) Für jeden Vektorraum W und jede bilineare Abbildung $f\colon U \otimes V \to W$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\overline{f}\colon U \times V \to W$, so dass $f \circ \iota = \overline{f}$.

9. Sei das Tensorprodukt durch $\iota\colon V \times W \to V \otimes W$ gegeben.

(a) ι ist injektiv.

(b) ι ist surjektiv.

(c) ι ist linear.

$\checkmark$ (d) ι ist multilinear.

(e) Alle obigen Aussagen sind falsch.

Wir bemerken, dass für $v \in V \setminus \{0\}$ gilt $(v, 0_W) \in \operatorname{Ker}(\iota)$, also ist ι nicht injektiv. Wenn $\dim(V), \dim(W) > 2$, dann gilt $\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \times W) < \dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$, und deshalb ist ι im allgemeinen nicht surjektiv.

ι ist nicht linear, da $\iota(\lambda(v,w)) = \iota(\lambda v, \lambda w) = (\lambda v) \otimes (\lambda w) = \lambda^2 v \otimes w = \lambda^2 \iota(v,w) \neq \lambda \iota(v,w)$.

10. Sei $\dim(V) = 6$, $k = 3$. Dann gilt $\dim \bigwedge^k V =$

(a) 0

(b) 6

(c) 9

(d) 15

$\checkmark$ (e) 20

(f) 24

Es gilt

$$\dim \bigwedge^k V = \begin{cases} \binom{\dim(V)}{k} & \text{, falls } k \leq \dim(V), \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$