D-MATH | Lineare Algebra II | HS 2020

Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 2

Einsendeschluss: 8.3.2021, 10:00

---

1. Die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für eine quadratische Matrix A und einen Vektor b sei $x = -b$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) b ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.

√ (b) b ist ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 von A.

(c) $-b$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.

(d) b ist kein Eigenvektor von A.

(e) $-b$ ist kein Eigenvektor von A.

(f) Keine der Aussagen ist richtig.

Aus $x = -b$ folgt $Ab = -Ax = -b$, folglich ist $0 = (A + I)(b)$ bzw. $b \in \mathrm{Ker}(L_{A+I})$ und wegen $b \neq 0$ ist somit b ein Eigenvektor zum Eigenwert -1. Also ist die zweite Aussage richtig, die vierte und die sechste somit falsch. Da $\mathrm{Ker}(L_{A+I})$ ein Unterraum ist, ist auch $-b \in \mathrm{Ker}(L_{A+I})$ und somit $-b$ ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert -1. Somit ist die fünfte Aussage falsch. Die erste und die dritte Aussage sind falsch, da der Eigenwert durch den Eigenvektor eindeutig bestimmt ist. Sei nämlich v ein Eigenvektor zu Eigenwerten λ_1, λ_2, dann ist $\lambda_1 v = Av = \lambda_2 v$, und da v ein Eigenvektor ist, folgt aus $v \neq 0$, dass

$$0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v$$

und also $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. Sei A eine Matrix mit charakteristischem Polynom $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$. Wir nehmen an, dass $5 \neq 0 \neq 6$.

√ (a) A ist diagonalisierbar.

√ (b) A ist invertierbar.

(c) $\det(A) = 5$.

3. Für welche Körper hat jede quadratische Matrix Eigenvektoren.

(a) $\mathbb{Q}$

(b) $\mathbb{R}$

√ (c) $\mathbb{C}$

Rotationsmatrizen haben keine Eigenwerte in $\mathbb{R}$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes Grad$-n$-Polynom genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$. Also hat das charakteristische Polynom Lösungen und somit hat die Matrix Eigenwerte.

4. Je zwei Eigenvektoren der gleichen Matrix sind linear unabhängig.

(a) richtig

√ (b) falsch

5. Ähnliche Matrizen haben die selben Eigenwerte.

√ (a) Richtig

(b) Falsch

6. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt für alle $n \geq 1$?

(a) Wenn eine $n \times n$-Matrix nur zu sich selbst ähnlich ist, dann ist sie die Einheitsmatrix.

(b) Zwei $n \times n$-Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie dasselbe charakteristische Polynom haben.

√ (c) Sind zwei $n \times n$-Matrizen A und B ähnlich, dann sind auch A^n und B^n ähnlich für alle $n \geq 0$.

(d) Keine der Aussagen ist richtig.

7. Welche der folgenden Endomorphismen von $\mathbb{R}^3$ haben einen Eigenwert gleich 1?

√ (a) Rotation um die y-Achse mit Winkel $90°$.

√ (b) Reflexion an der x-Achse.

(c) Streckung um Faktor 2.

√ (d) Projektion auf yz-Ebene.

√ (e) Reflexion an der xz-Ebene.

8. Eine lineare Abbildung T auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V ist diagonalisierbar genau dann, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität gleich sind.

(a) Wahr.

$\surd$ (b) Falsch.

Die lineare Abbildung ist genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität übereinstimmen. Beispiel: Bei Rotationen zerfällt das Polynom nicht in Linearfaktoren.

9. Jeder reelle Endomorphismus ist triagonalisierbar.

(a) Wahr

$\surd$ (b) Falsch

Die Aussage stimmt über $\mathbb{C}$.

10. Wenn $3^{10} = 59049$ ist, was ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{10} ?$$

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 29524 & 29525 \\ 29525 & 29524 \end{smallmatrix}\right)$

$\surd$ (b) $\left(\begin{smallmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 59048 & 59050 \\ 59050 & 59048 \end{smallmatrix}\right)$

(d) $\left(\begin{smallmatrix} 59049 & 59050 \\ 59050 & 59049 \end{smallmatrix}\right)$

(e) Keine der obigen Matrizen

Die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat die einfachen Eigenwerte 3 und -1 zu den jeweiligen Eigenvektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Matrix A ist daher diagonalisierbar und wir haben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A^{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{10}+1 & 3^{10}-1 \\ 3^{10}-1 & 3^{10}+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist Antwort (b) korrekt.