D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2021
Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 3

Einsendeschluss: 15.3.2021, 10:00

---

1. Jede Matrix ist triagonalisierbar ..

(a) .. über $\mathbb{Q}$

(b) .. über $\mathbb{R}$

√ (c) .. über $\mathbb{C}$

(d) .. über $\mathbb{F}_2$

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $T \in \mathrm{End}(V)$ und sei p_T das charakteristische Polynom von T. Dann gilt $p_T(T) = 0$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Die Aussage ist wahr. Dies ist der Satz von Cayley-Hamilton.

3. Sei A eine Matrix mit $p_A(x) = x^2 - 3x$, so ist A invertierbar.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch, da der konstante Term des charakteristischen Polynoms mit der Determinanten übereinstimmt.

4. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann existiert ein Polynom p von Grad $\dim V$ und mit Koeffizienten in K, sodass $p(T)$ die Nullabbildung ist.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist $p_T(T) = 0$ und es folgt sofort aus der Definition von $p_T(X)$, dass $p_T(x) \in K[x]$ mit $\deg\big(p_T(x)\big) = \dim V$.

5. Jedes Polynom mit Leitkoeffizient $(-1)^n$ ist charakteristisches Polynom eines Operators.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Betrachten Sie das charakterisische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & a_1 & \cdots & \pm a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

6. Betrachten Sie die lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Was sind die invarianten Unterräume von m_A?

(a) $\mathbb{R}^2$ und $\mathrm{Sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$

√ (b) $\mathbb{R}^2$ und $\{0\}$

(c) $\mathbb{R}^2$, $\{0\}$ und $\mathrm{Sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$

(d) $\mathbb{R}^2$

Es ist klar, dass $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$ invariante Unterräume von m_A sind. Angenommen $W \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein weiterer invarianter Unterraum, dann ist $\dim W = 1$ und insbesondere existiert $v \in W \setminus \{0\}$, so dass $W = \mathbb{R}v$. Da W invariant ist, gilt $m_A(v) = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und folglich ist v ein Eigenvektor von m_A, zu einem reellen Eigenwert λ.

Das charakteristische Polynom von m_A ist gegeben durch

$$p_{m_A}(x) = (2-x)(-2-x) + 6 = x^2 + 2,$$

und hat also Diskriminante -8, bzw. keine reellen Nullstellen. Insbesondere hat m_A keinen reellen Eigenwert und folglich besitzt m_A keine eindimensionalen invarianten Unterräume. Die richtige Antwort ist also Antwort (b).

7. Sei A eine $n \times n$ Matrix mit $p_A(x) = x^2 - x - 1$, dann ist

(a) A^{-1} existiert nicht.

(b) A^{-1} existiert aber kann nicht aus diesen Angaben hergeleitet werden.

(c) $A^{-1} = A + I_n$.

$\surd$ (d) $A^{-1} = A - I_n$.

Wir wissen, dass für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt $\deg p_A(x) = n$. Folglich ist für A wie in der Aufgabenstellung $A \in M_{2\times 2}(K)$. Wir haben aber bereits gesehen, dass eine Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn der konstante Term des charakteristischen Polynoms von Null verschieden ist, und in diesem Falle gilt für $p_A(x) = x^2 + a_1x + a_0$ nach Cayley-Hamilton, dass

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A + a_1 I_2).$$

Unter den Voraussetzungen der Aufgabenstellung ist also A invertierbar und $A^{-1} = A - I_2$.

8. Betrachte die Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (0, x, y)$. So ist $T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ eine Nullstelle des Polynoms

(a) $p(x) = x$.

(b) $p(x) = x^2$.

(c) $p(x) = x^3$.

$\surd$ (d) $T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ist nicht eine Nullstelle eines Polynoms aus der obigen Liste.

Es ist $A := [T]_{\mathcal{E}_3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich $B = [T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist B invertierbar und somit auch B^k für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist auch $(T + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ invertierbar und insbesondere nie 0.

9. Sei A eine 5×5 obere Dreiecksmatrix mit allen Einträgen auf der Diagonalen gleich 0, so gilt für die Matrix $I_5 + A$:

√ (a) Sie ist invertierbar.

(b) Sie ist singulär.

(c) Sie ist nilpotent.

Die Matrix $I_5 + A$ ist eine obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen gleich 1. Folglich ist $\det(I_5 + A) = 1$ und folglich ist $I_5 + A$ invertierbar. Also ist Aussage (a) richtig und Aussage (b) falsch. Da Potenzen invertierbarer Matrizen wieder invertierbar sind, ist $I_5 + A$ nicht nilpotent, da wegen der Multiplikativität der Determinante gilt $\det(A^k) = (\det A)^k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

10. *Prüfung Winter 2018:* Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, sodass AB nilpotent ist, aber BA nicht nilpotent ist.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Sei $(AB)^n = 0$, dann ist $(BA)^{n+1} = B(AB)^n A = 0$.