MC-Fragen Serie 4

Einsendeschluss: 22.3.2021, 10:00

---

1. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und seien $u, v, w \in V$. Wenn $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$, dann ist $v = w$.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Betrachte $\mathbb{R}^3$ mit dem standard inneren Produkt sowie die drei orthogonalen vektoren e_1, e_2, e_3 der Standardbasis. Es gilt $\langle e_1, e_2\rangle = 0 = \langle e_1, e_3\rangle$, aber $e_2 \neq e_3$. Die Folgerung aus der Frage gilt nur dann, wenn die Gleichheit für alle $u \in V$ erfüllt ist.

2. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und seien $u, v \in V$, sodass $\|u+v\| = 2$ und $\|u-v\| = \sqrt{8}$. Dann ist

√ (a) $\langle u, v\rangle = -1$

(b) $\langle u, v\rangle = 4$

(c) $\langle u, v\rangle = -4$

(d) $\langle u, v\rangle = \sqrt{2}$

(e) $\langle u, v\rangle = 0$

Wir erinnern an die Parallelogrammgleichung:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\big).$$

Andernfalls zeigt man direkt

$$\begin{aligned} 4 =& \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\ 8 =& \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$4 = -4\langle u, v\rangle.$$

3. Welche Bedingungen müssen an eine Matrix A gestellt werden, damit $(v, w) \mapsto v^T A w$ ein Skalarprodukt ist.

$\surd$ (a) $A = A^T$

(b) $\det(A) = 1$

$\surd$ (c) A ist positiv definit

(d) Alle Eigenwerte von A müssen gleich sein.

4. Aus welchen mathematischen Strukturen auf Vektorräumen kann man auf die Existenz anderer schliessen?

$\surd$ (a) Eine Norm impliziert eine Metrik.

(b) Eine Metrik impliziert ein Skalarprodukt.

$\surd$ (c) Ein Skalarprodukt impliziert eine Norm.

(d) Eine Norm impliziert ein Skalarprodukt.

$\surd$ (e) Ein Skalarprodukt impliziert eine Metrik.

(f) Eine Metrik impliziert eine Norm.

Ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ führt zu einer Norm $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, welche zu einer Metrik $d(v, w) = ||v - w||$ führt.

Gegenbeispiele sind zum Beispiel diskrete Metriken, oder die Manhattan-Norm.

5. Welche der folgenden Vorschriften definieren innere Produkte auf den entsprechenden $\mathbb{R}$-Vektorräumen?

(a) $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac - bd$ auf $\mathbb{R}^2$

Die Vorschrift ist nicht positiv definit, denn $\langle (1, 1), (1, 1) \rangle = 0$.

(b) $\langle A, B \rangle := \mathrm{spur}(A + B)$ für $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Die Vorschrift ist nicht linear im ersten Argument. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist

$$\langle 2A, A \rangle = \mathrm{tr}(3A) = 3 \neq 4 = 2\mathrm{tr}(2A) = 2\langle A, A \rangle.$$

(c) $\langle p, q \rangle := \int_0^1 p'(x) q(x) \mathrm{d}x$ für $p, q \in \mathbb{R}[x]$, wobei p' die Polynomfunktion nach formaler Ableitung von p ist.

Die Vorschrift ist nicht positiv, da $\langle 1, 1 \rangle = 0$.

$\surd$ (d) Keine der obigen Möglichkeiten

6. Seien $u, v \in V$ in einem Euklidischen Vektorraum V.

√ (a) Es gilt $\langle u, v\rangle \leq ||u|| \cdot ||v||$

(b) Es gilt $\langle u, v\rangle \geq ||u|| \cdot ||v||$

√ (c) Falls u, v linear unabhängig sind, dann gilt $\langle u, v\rangle < ||u|| \cdot ||v||$

(d) Falls u, v linear unabhängig sind, dann gilt $\langle u, v\rangle > ||u|| \cdot ||v||$

(e) Falls u, v linear abhängig sind, dann gilt $\langle u, v\rangle < ||u|| \cdot ||v||$

(f) Falls u, v linear abhängig sind, dann gilt $\langle u, v\rangle > ||u|| \cdot ||v||$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung sagt zusätzlich, dass Gleichheit gilt, genau dann wenn u, v linear abhängig sind.

7. Der Winkel α zwischen zwei Vektoren $u, v \in V \setminus \{0\}$ ist gegeben durch

√ (a) $\cos(\alpha) = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}$

(b) $\cos(\alpha) = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||^2\cdot||v||^2}$

√ (c) $\cos(\alpha) = \left\langle \frac{u}{||u||}, \frac{v}{||v||} \right\rangle$

8. Sei $u, v, w, a, b \in V$ Elemente in einem unitären Vektorraum V.

√ (a) $\langle 5v, w\rangle = \langle v, 5w\rangle$

√ (b) $\langle \frac{1}{3}u + 2iv, w\rangle = \langle u, \frac{1}{3}w\rangle + 2i\langle v, w\rangle$

√ (c) $i\langle u, v - w\rangle = \langle u, iw\rangle + \langle iu, v\rangle$

√ (d) $\langle a, \langle u, v\rangle \cdot b\rangle = \langle v, u\rangle \cdot \langle a, b\rangle$

9. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann besitzen T und T^* dieselben Eigenvektoren.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Betrachte die Abbildung $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist e_1 ein Eigenvektor von L_A (zum Eigenwert 0), aber e_1 ist kein Eigenvektor von L_A^*, denn

$$L_A^* e_1 = L_{A^T} e_1 = e_2.$$

10. Sei $V = \mathbb{C}[x]_2$ ein unitärer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, das durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ gegeben ist.

(a) $\mathcal{B}$ ist eine Orthogonal-Basis.

(b) $\mathcal{B}$ ist eine Orthonormal-Basis.

$\checkmark$ (c) $\langle x, 1 + x^2 \rangle = 1$.

(d) $2 - x + 2ix^2$ ist orthogonal zu x.

(e) Für alle $p, q \in \mathbb{C}[x]_2$ gilt $\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}$.

(f) Für alle $p, q \in \mathbb{C}[x]_2$ gilt $\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(g) Für alle $p, q \in \mathbb{R}[x]_2 \subseteq \mathbb{C}[x]_2$ gilt $\langle p, q \rangle \in \mathbb{R}$.

Da $\langle 1, x \rangle = i \neq 0$, ist die Basis nicht orthogonal. Das gleiche Beispiel zeigt auch, dass ein unitäres Skalarprodukt nicht rell sein muss. Die Norm eines Vektors ist hingegen immer eine nicht-negative reelle Zahl.