D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2021
Dr. Menny Akka Ginosar

# MC-Fragen Serie 5

**Einsendeschluss: 29.3.2021, 10:00**

---

**1.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Dann ist jede Teilmenge paarweise orthogonaler Vektoren linear unabhängig.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Teilmenge $\{0\}$ ist eine Teilmenge paarweise orthogonaler Vektoren, aber sicher nicht linear unabhängig.

**2.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum. Dann ist jede orthonormale Teilmenge linear unabhängig.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Das wurde in der Vorlesung bewiesen.

**3.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $S \subset V$. Dann ist $S^\perp$ ein Unterraum von $V$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

**4.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $W \subset V$ ein Unterraum. Dann ist $W$ das orthogonale Komplement eines Unterraums von $V$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

**5.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $S \subset V$. Dann ist $(S^\perp)^\perp = \text{span}(S)$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

**6.** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, und seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset V$ zwei Orthonormalbasen von $V$. Dann existiert $T \in \mathrm{End}(V)$, sodass $T(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Das folgt – unabhängig von der Euklidischen Struktur und der Orthonormalität der Basen aus der Tatsache, dass für jede Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $V$ (wobei $n = \dim(V)$) sowie beliebige $w_1, \ldots, w_n \in V$ genau ein $T \in \mathrm{End}(V)$ existiert, sodass gilt $T(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

**7.** Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\mathcal{B}$ eine Basis, so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Sei $\mathcal{B}'$ die Basis, die man bekommt wenn man Gram-Schmidt auf $\mathcal{B}$ anwendet. Dann ist $[T]_{\mathcal{B}'}$ auch eine obere Dreiecksmatrix.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

**8.** Sei $Q$ eine orthogonale Matrix.

$\surd$ (a) Die Zeilenvektoren von $Q$ bilden eine orthogonale Basis.

$\surd$ (b) Die Zeilenvektoren von $Q$ bilden eine orthonormale Basis.

$\surd$ (c) Die Spaltenvektoren von $Q$ bilden eine orthogonale Basis.

$\surd$ (d) Die Spaltenvektoren von $Q$ bilden eine orthonormale Basis.

(e) $Q$ ist diagonalisierbar.

(f) $Q$ ist symmetrisch.

Obwohl die Matrizen orthogonal genannt werden (und nicht orthonormal) bestehen sie aus orthonormalen Vektoren. Rotationsmatrizen sind nicht diagonalisierbar, aber orthogonal.

**9.** Sei $V$ ein Euklidischer Vektorraum und $U$ ein Unterraum. Es gilt $V = U \oplus U^{\perp}$.

(a) Richtig.

$\surd$ (b) Falsch.

Die Aussage stimmt im Allgemeinen nur, wenn $U$ endlichdimensional.

**10.** Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $U$ ein Unterraum. Sei $u, v, w \in V$. Welche Aussagen stimmen immer?

$\surd$ (a) Wenn $U = \mathrm{Sp}(u, v)$ und $w$ ist orthogonal zu $u$ und $v$, dann ist $w$ in $U^{\perp}$.

$\surd$ (b) Wenn $v \in U$, dann $P_U(v) = v$.

(c) $P_U(v)$ ist orthogonal zu $v$.

$\surd$ (d) $P_U(v)$ ist orthogonal zu $U^{\perp}$.