MC-Fragen Serie 6

Einsendeschluss: 12.4.2021, 10:00

---

1. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann besitzen T und T^* dieselben Eigenvektoren.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Betrachte die Abbildung $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist e_1 ein Eigenvektor von L_A (zum Eigenwert 0), aber e_1 ist kein Eigenvektor von L_A^*, denn

$$L_A^* e_1 = L_{A^T} e_1 = e_2.$$

2. Welche Aussagen stimmen?

√ (a) Eine Matrix über $\mathbb{R}$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn sie symmetrisch ist.

√ (b) Eine Matrix über $\mathbb{C}$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn sie hermitesch ist.

√ (c) Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt. Die adjungierte $T^\star$ von $T\colon W \to V$ kann durch die Gleichung

$$\langle v, Tw\rangle_V = \langle T^\star v, w\rangle_W \qquad \text{für } v \in V, w \in W$$

definiert werden.

Die Äquivalenz der letzten Definition folgt aus der Symmetrie des Skalarprodukts.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Die Identität ist selbstadjungiert.

√ (b) Die Nullabbildung ist selbstadjungiert.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

Es gilt für alle $v, w \in V$, dass

$$\begin{aligned}\langle I_V v, w\rangle =& \langle v, w\rangle = \langle v, I_V w\rangle,\\ \langle 0_V v, w\rangle =& \langle 0, w\rangle = 0 = \langle v, 0\rangle = \langle v, 0_V w\rangle.\end{aligned}$$

Somit sind beide Abbildungen selbstadjungiert.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $T \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann sind alle Eigenwerte von T in $\mathbb{R}$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Das ist Lemma 7.2.13.

5. Welche Implikationen gelten für einen endlichdimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt V und $T \in \mathrm{End}(V)$?

√ (a) Für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ gilt: T selbstadjungiert impliziert T normal.

√ (b) Für $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gilt: T selbstadjungiert impliziert T normal.

(c) Für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ gilt: T normal impliziert T selbstadjungiert.

(d) Für $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gilt: T normal impliziert T selbstadjungiert.

√ (e) Für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ gilt: T ist selbstadjungiert genau dann wenn T orthogonal diagonalisierbar ist.

Das ist der Spektralsatz für $\mathbb{R}$

(f) Für $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gilt: T ist selbstadjungiert genau dann wenn T orthogonal diagonalisierbar ist.

(g) Für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ gilt: T ist normal genau dann wenn T orthogonal diagonalisierbar ist.

√ (h) Für $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ gilt: T ist normal genau dann wenn T orthogonal diagonalisierbar ist.

Das ist der Spektralsatz für $\mathbb{C}$

6. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V mit Skalarprodukt.

(a) Falls $TT^\star = \mathrm{Id}$, dann ist T diagonalisierbar.

Betrachte Rotationsmatrizen über $\mathbb{R}$.

√ (b) Falls $T = T^\star$, dann ist T diagonalisierbar.

Der Spektralsatz für $\mathbb{R}$ (Satz 7.2.12) besagt, dass T selbstadjungiert ist ($T = T^*$) genau dann wenn T orthogonal diagonalisierbar ist.

(c) Falls $TT^\star = T^\star T$, dann ist T diagonalisierbar.

Wenn T normal ist ($TT^\star = T^\star T$) und p_T in Linearfaktoren zerfällt, dann ist T diagonalisierbar. Für $\mathbb{C}$ ist das der Spektralsatz. Für $\mathbb{R}$ stimmt die Aussage aber nicht.

7. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ eine orthogonale Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann ist $[T]_\mathcal{B}$ orthogonal

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Aussage stimmt, falls $\mathcal{B}$ eine Orthormalbasis ist, aber für allgemeine Basen ist die Aussage falsch. Wir illustrieren dies am Beispiel der Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch Rotation in der Ebene um 90 Grad. Wähle die nicht orthonormale Basis $\mathcal{B} = (e_1, e_1 + e_2)$ von $\mathbb{R}^2$. Dann ist $T(e_1) = e_2$ und $T(e_1 + e_2) = -e_1 + e_2$ und folglich

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und man berechnet

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Falls $\mathcal{B}$ eine orthonormale Basis ist, dann gilt:

$$[T]_\mathcal{B}^{-1}[T]_\mathcal{B} = I_n = [T^*T]_\mathcal{B} = [T^*]_\mathcal{B}[T]_\mathcal{B} \overset{\mathcal{B}\ \text{ONB}}{=} [T]_\mathcal{B}^T[T]_\mathcal{B},$$

und folglich ist $[T]_\mathcal{B}^{-1} = [T]_\mathcal{B}^T$ und somit $[T]_\mathcal{B}$ orthogonal.

8. Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal diagonalisierbar?

(a) Ja, über $\mathbb{R}$.

√ (b) Ja, über $\mathbb{C}$.

(c) Nein, weder noch.

Man überprüft, dass die Matrix normal ist ($A^\star A = AA^\star$).

9. Eine Isometrie auf einem Euklidischen Vektorraum ist eine Abbildung $T : V \to V$, sodass $\|Tv - Tw\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in V$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Jede Isometrie ist orthogonal.

√ (b) Jede orthogonale Abbildung ist eine Isometrie.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

Sei $v \in V \setminus \{0\}$ und betrachte die Abbildung $T : w \mapsto v + w$, dann gilt sicher $\|T(v_1) - T(v_2)\| = \|v_1 - v_2\|$ für alle $v_1, v_2 \in V$ und somit ist T eine Isometrie. Allerdings ist T nicht linear und insbesondere nicht orthogonal.
Falls T orthogonal ist, dann gilt per definitionem

$$\begin{aligned}
\|Tv_1 - Tv_2\|^2 =& \langle Tv_1 - Tv_2, Tv_1 - Tv_2 \rangle \\
=& \langle Tv_1, Tv_1 \rangle - 2\langle Tv_1, Tv_2 \rangle + \langle Tv_2, Tv_2 \rangle \\
=& \langle v_1, v_1 \rangle - 2\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle \\
=& \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle = \|v_1 - v_2\|^2
\end{aligned}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und somit ist T eine Isometrie.

10. Jede reelle symmetrische Matrix endlicher Ordnung $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ist eine Involution, d.h. $A^2 = I_n$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Laut Spektralsatz wissen wir, dass eine orthogonale Matrix Q sowie eine Diagonalmatrix $D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ existieren, sodass $A = Q^T DQ$ gilt. Insbesondere ist $D = QAQ^T$ und somit nach Voraussetzung

$$D^k = (QAQ^T)^k = QA^kQ^T = I_n$$

für ein $k \in \mathbb{N}$.