Dr. Menny Akka Ginosar

MC-Fragen Serie 7

Einsendeschluss: 19.4.2021, 10:00

---

1. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine symmetrische komplexe Matrix, also $A^T = A$. Was können Sie über die Eigenwerte von A aussagen?

(a) Alle Eigenwerte von A sind reel.

(b) Die nicht reellen Eigenwerte treten in konjugiert komplexen Paaren auf.

(c) Summe und Produkt der Eigenwerte müssen positiv sein.

√ (d) Nichts. Jedes n-Tupel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ komplexer Zahlen kann als Eigenwerte einer solchen Matrix auftreten.

Für den Spektralsatz über $\mathbb{C}$ muss die Matrix hermitesch sein, also $\overline{A}^T = A$. Solange sie nur symmetrisch ist, kann man eine Diagonalenmatrix mit beliebigen Einträgen machen.

2. Wählen Sie alle Wörter an, die sich auf komplexe Skalarprodukträume beziehen (auch wenn sich ein Wort sowohl auf $\mathbb{R}$, als auch auf $\mathbb{C}$ bezieht). Überlegen sie sich auch welche Wörter zusammengehören.

(a) Euklidisch

√ (b) unitär

(c) orthogonal

√ (d) positiv definit

(e) symmetrisch

√ (f) hermitesch

√ (g) sesquilinear

(h) bilinear

√ (i) adjungiert

√ (j) selbstadjungiert

√ (k) normal

Ein Skalarproduktraum über $\mathbb{R}$ heisst Euklidisch, über $\mathbb{C}$ heisst er unitär. Matrizen und Endomorphismen können unitär ($\mathbb{C}$) oder orthogonal sein ($\mathbb{R}$). Skalarprodukte über $\mathbb{C}$ sind sesquilinear, hermitesch und positiv definit, über $\mathbb{R}$ sind sie bilinear, symmetrisch und positiv definit. Die Adjungierte macht in beiden Fällen Sinn und sie kann selbstadjungiert sein. Für $\mathbb{C}$ ist es wichtig wann ein Edomorphismus oder eine Matrix normal sind, denn dann kann der Spektralsatz angewandt werden.

3. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

√ (a) Die Matrix A ist orthogonal diagonalisierbar.

√ (b) Der Endomorphismus m_A ist orthogonal diagonalisierbar bezüglich des Standardkalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

(c) Sei T ein Endomorphismus mit Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{B}} = A$ für eine Basis $\mathcal{B}$. Dann ist T orthogonal diagonalisierbar.

Der Spektralsatz über $\mathbb{R}$ besagt, dass ein Endomorphismus orthogonal diagonalisierbar ist genau dann wenn es eine Orthonormalbasis gibt bezüglich der die Darstellungsmatrix symmetrisch ist.

4. Gibt es ein $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, so dass T nicht selbstadjungiert (bezüglich Standardskalarprodukt) ist und es eine eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von T gibt.

$\surd$ (a) Ja

(b) Nein

Betrachte die lineare Abbildung m_A gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

welche nicht selbstadjungiert ist, aber eine Basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_2, e_3\}$ aus Eigenvektoren hat. Somit ist A diagonalisierbar. Das ist kein Widerspruch zum Spektralsatz (Eine lineare Abbildung ist selbstadjungiert genau dann wenn sie orthogonal diagonalsierbar ist.), da A nicht *orthogonal* diagonalsierbar ist.

5. Welche der folgenden Aussagen über die Adjungierte von $T\colon V \to W$ stimmen in allen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorräumen V, W.

$\surd$ (a) $\mathrm{Ker}(T^\star) = (\mathrm{Im}(T))^\perp$.

$\surd$ (b) $\mathrm{Im}(T^\star) = (\mathrm{Ker}(T))^\perp$.

$\surd$ (c) $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T^\star) = \{0\}$.

Siehe Lemma 7.1.5.

6. Die folgenden Fragen stammen aus früheren Prüfungen und beziehen sich auf den ganzen Lineare Algebra II Stoff. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.

$\surd$ (a) Jeder nilpotente diagonalisierbare Endomorphismus von V ist 0.

(b) Jeder nilpotente Endomorphismus von V ist diagonalisierbar.

(c) Es gibt einen nilpotenten Endomorphismus dessen charakteristisches Polynom durch $x + 1$ teilbar ist.

7. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^n$ mit dem üblichen Skalarprodukt und $\mathcal{B}^\star = \{v_1^\star, \ldots, v_n^\star\}$ die duale Basis des Dualraums $V^\star$, definiert durch

$$v_i^\star(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\Psi_\mathcal{B} \colon V \to V^\star$ die lineare Abbildung definiert durch $\Psi_\mathcal{B}(v_i) = v_i^\star$. Welche Aussagen sind wahr?

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine andere Basis von V. Dann gilt $\Psi_\mathcal{B} = \Psi_\mathcal{A}$.

(b) Für verschiedene Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt immer $\Psi_\mathcal{A} \neq \Psi_\mathcal{B}$.

√ (c) Falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Orthonormalbasen von V sind, dann gilt $\Psi_\mathcal{B} = \Psi_\mathcal{A}$.

Als Beispiel sei die Standardbasis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ gegeben. Die dazu duale Basis ist durch $\mathcal{B}^\star = \{(10), (01)\}$ gegeben, wobei wir die Elemente von $V^\star$ als Matrizen schreiben. Eine andere Basis ist gegeben durch

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

mit dualer Basis

$$\mathcal{A}^\star = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Wir bemerken, dass

$$\Psi_\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \Psi_\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Somit ist (a) falsch.

Für (b) und (c) betrachten wir die Standardbasis $\mathcal{B}$ und eine orthonormale Basis $\mathcal{A} = Q\mathcal{B}$ mit $Q^TQ = I_n$, bestehend aus den Zeilenvektoren von Q. Wir behaupten, dass die duale Basis $\mathcal{A}^\star$ durch die Spaltenvektoren von Q gegeben sind. In der Tat ist dann die Bedingung $Q^TQ = I_n$ gerade die definierende Eigenschaft der dualen Basis, dass $v_i^\star(v_j) = \delta_{ij}$. Die Behauptung (c) folgt durch zweimaliges Anwenden der obigen Überlegung.

8. Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V. Welche der folgenden Aussagen gilt?

√ (a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(b) $U_1^\perp \cap U_2 = U_1 \cap U_2^\perp$.

√ (c) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

√ (d) $U_1 + U_1^\perp = U_2 + U_2^\perp$.

9. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, so dass $A^3 = A^2$. Dann gilt:

(a) $A = 0$.

√ (b) $A^2 = A$.

(c) $A = I_n$.

(d) $A^2 = I_n$.

Mit Spektralsatz folgt, dass die Eigenwerte alle 0 oder 1 sein müssen.

10. Wie viele selbstadjungierte Endomorphismen gibt es in $\mathbb{R}^n$.

(a) 1

(b) 2^n

(c) 4^n

√ (d) ∞