MC-Fragen Serie 8

Einsendeschluss: 26.4.2021, 10:00

---

1. Jeder unitäre Operator ist normal.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Unitäre Operatoren erfüllen $T^\star T = \mathrm{Id} = TT^\star$.

2. Weche Aussagen über orthogonale Operatoren stimmen?

(a) Jeder orthogonale Operator ist diagonalisierbar.

(b) Ausser der Identität ist kein orthogonaler Operator diagonalisierbar.

√ (c) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

3. Falls alle Eigenwerte eines Endomorphismus gleich 1 sind, dann muss der Endomorphismus unitär oder orthogonal sein.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Betrachte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Welche der folgenden linearen Abbildungen sind orthogonal?

√ (a) Die Identität.

√ (b) Spiegelungen an Hyperebenen (Unterräume mit Codimension 1).

√ (c) Die Punktspiegelung am Ursprung.

(d) Orthogonale Projektionen auf Unterräume.

(e) Streckungen.

√ (f) Rotationen.

(g) Alle Abbildungen mit Determinante = 1.

5. Eine Isometrie auf einem Euklidischen Vektorraum ist eine Abbildung $T : V \to V$, sodass $\|Tv - Tw\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in V$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Jede Isometrie ist orthogonal.

√ (b) Jede orthogonale Abbildung ist eine Isometrie.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

Sei $v \in V \setminus \{0\}$ und betrachte die Abbildung $T : w \mapsto v + w$, dann gilt sicher $\|T(v_1) - T(v_2)\| = \|v_1 - v_2\|$ für alle $v_1, v_2 \in V$ und somit ist T eine Isometrie. Allerdings ist T nicht linear und insbesondere nicht orthogonal. Fun-Fact: Jede *lineare* Isometrie ist orthogonal.
Falls T orthogonal ist, dann gilt per definitionem

$$\begin{aligned}\|Tv_1 - Tv_2\|^2 =& \langle Tv_1 - Tv_2, Tv_1 - Tv_2\rangle \\ =& \langle Tv_1, Tv_1\rangle - 2\langle Tv_1, Tv_2\rangle + \langle Tv_2, Tv_2\rangle \\ =& \langle v_1, v_1\rangle - 2\langle v_1, v_2\rangle + \langle v_2, v_2\rangle \\ =& \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2\rangle = \|v_1 - v_2\|^2\end{aligned}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und somit ist T eine Isometrie.

6. Sei T ein linearer Operator auf einem endlichdimensionalen Vektorraum. Welche Aussagen über Singulärwerte und Eigenwerte sind wahr?

(a) Wenn λ ein Eigenwert von T ist, dann ist λ auch ein Singulärwert.

(b) Wenn σ ein Singularwert von T ist, dann ist σ auch ein Eigenwert.

√ (c) Wenn σ ein Singulärwert von T ist, dann ist σ^2 ein Eigenwert von $T^\star T$.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat nur den Eigenwert 0, aber zwei Singulärwerte, die nicht null sind.

Die letzte Aussage ist Teil des Satzes über die Singulärwertzerlegung.

7. Sei $c \in \mathbb{R}$. Wenn σ ein Singulärwert von A ist, dann ist $c\sigma$ ein Singulärwert von cA.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Singulärwerte sind immer positve reelle Zahlen. Es stimmt jedoch dass $|c|\sigma$ ein Singulärwert von cA ist, sogar wenn $c \in \mathbb{C}$.

8. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert einer selbstadjungierten Matrix A. Dann ist $|\lambda|$ ein Singularwert von A.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Wenn A selbstadjungiert ist, dann ist A orthogonal diagonalisierbar $A = Q^\star DQ$, wobei D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Eigenwerte der Grösse (im Betrag) nach geordnet sind (sonst können wir Permutationsmatrizen anwenden). Für die Eigenwerte λ_k können wir $\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\varphi_k}$ schreiben. Sei jetzt

$$E = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-i\varphi_n} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A = Q^\star(DE)E^{-1}Q$ eine Singularwertzerlgeung (E^{-1} und daher auch $E^{-1}Q$ ist orthogonal). Die Singulärwerte sind die Einträge in DE, also genau $\lambda_k e^{-i\varphi_k} = |\lambda_k|$.

9. Welche Aussagen über eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ gelten?

√ (a) $\mathrm{Rang}(T) = \mathrm{Rang}(T^\star)$

√ (b) $\ker(TT^\star) = \ker(T^\star)$

(c) $\ker(T^\star T) = \ker(T^\star)$

(d) $\mathrm{Im}(T^\star T) = \mathrm{Im}(T)$

√ (e) $\mathrm{Im}(TT^\star) = \mathrm{Im}(T)$

√ (f) Alle Eigenwerte von $TT^\star$ sind nicht-negative reelle Zahlen.

Wenn $V \neq W$, dann können die falschen Aussagen schon aus Prinzip nicht gelten. Für die anderen Aussagen siehe Lemma 7.5.5 im Skript.

10. Alle Singulärwerte von T sind gleich 0 genau dann wenn $T = 0$.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.