MC-Fragen Serie 9

Einsendeschluss: 3.5.2021, 10:00

---

1. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\dim(V) > 1$ und sei $B \in \mathrm{Bil}(V)$. Dann existiert für jedes $u \in V$ ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass $B(u, v) = 0$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Gegeben $u \in V$, dann ist die Abbildung $B_u : v \mapsto B(u, v)$ linear und von einem n-dimensionalen Vektorraum auf einen 1-dimensionalen Raum. Also hat der Kern $\mathrm{Ker}(B_u)$ mindestens $n - 1 > 0$ Dimensionen und wir können v im Kern wählen.

2. Sei K ein Körper und $A \in M_{n\times n}(K)$ symmetrisch, dann ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Wir zeigen, dass für $K = \mathbb{F}_2$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nicht kongruent ist zu einer Diagonalmatrix. Angenommen es ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(\mathbb{F}_2)$, dann ist $ad - bc = ad + bc = 1$, da $bc = -bc$ gilt und weil $\mathbb{F}_2^\times = \{1\}$ ist.

Man berechnet

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nur zu sich selber kongruent und insbesondere nicht kongruent zu einer Diagonalmatrix.

Man beachte: wenn in K gilt $2 \neq 0$, dann ist die Aussage wahr.

3. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $B \in \mathrm{Bil}(V)$, dann existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}(B)$ eine Diagonalmatrix ist.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Betrachte die Bilinearform $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto x^T Ay$ für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Man rechnet nach, dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $B(x, x) = 0$, und somit wäre eine B darstellende Diagonalmatrix automatisch die Nullmatrix. Es ist aber $B\big((x_1, x_2), (x_2, -x_1)\big) = x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ wann immer $x_1 \neq 0$ und somit $B \not\equiv 0$. Also existiert keine B darstellende Diagonalmatrix.

Für symmetrische Bilinearformen würde die Aussage stimmen, da $\mathbb{R} \neq \mathbb{F}_2$.

4. Jede Bilinearform auf einem reellen Vektorraum ist ein inneres Produkt.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die Bilinearform muss symmetrisch und positiv-Definit sein.

5. Was stimmt?

(a) Jede Quadratische Form ist eine bilineare Abbildung.

(b) Jede bilineare Abbildung ist eine quadratische Form.

√ (c) Keines der beiden.

Es sind nur schon unterschiedliche mathematische Objekte, die eine unterschiedliche Anzahl an Elementen als Input nehmen. Es gibt aber eine direkte Übersetzung von quadratischen Formen zu blinearen Abbildungen.

6. Wenn zwei symmetrische relle Matrizen kongruent sind, dann..

(a) ... haben sie die gleichen Eigenwerte.

(b) ... haben sie die gleiche Determinante.

√ (c) ... haben sie die gleiche Signatur.

7. Es gibt eine Bilinearform $B \colon V \times V \to K$, so dass für alle $v, w \in V \neq 0$ gilt $B(v, w) \neq 0$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Damit das funktionniert muss aber $\dim(V) = 1$ gelten, denn sonst ist für jedes $w_0 \in V$, $v \mapsto B(v, w_0)$ eine lineare Abbildung mit positiv-dimensionalem Kern.

8. Wenn V ein n-dimensionaler Vektorraum ist, dann gilt:

(a) $\dim(\mathrm{Bil}(V)) = 2n$

(b) $\dim(\mathrm{Bil}(V)) = \frac{n(n-1)}{2}$

√ (c) $\dim(\mathrm{Bil}(V)) = n^2$

(d) $\dim(\mathrm{Bil}(V)) = 2^n$

9. Wieviele Kongruenzklassen von reellen symmetrischen 2×2 Matrizen gibt es?

(a) 1

(b) 4

(c) 5

√ (d) 6

(e) 7

(f) 8

(g) ∞

10. Sei $K = \mathbb{C}$ und V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Für jede symmetrische Bilinearform $B \in \mathrm{Bil}(V)$ gibt es eine Basis $\mathcal{B}$, so dass:

√ (a) $M_{\mathcal{B}}(B)$ diagonal ist, nur mit 0 und 1 auf der Diagonalen.

√ (b) $M_{\mathcal{B}}(B)$ diagonal ist, nur mit 0, 1 und -1 auf der Diagonalen.

(c) $M_{\mathcal{B}}(B)$ diagonal ist, nur mit Diagonaleneinträgen $x \in \mathbb{C}$, so dass $|x| = 1$.

(b) folgt logisch aus (a). In (c) ist die Null vergessen gegangen.