Übungsserie 1

Abgabe bis zum 10. März

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $B := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, und für $n \geq 0$, sei $f_n : B \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$. Sei $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = (1-z)^{-1}$. Erklären Sie detailliert was die folgenden Aussagen bedeuten, und beweisen Sie:

(a) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen f.

(b) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert nicht gleichmässig gegen f.

(c) Sei $r < 1$ eine reelle Zahl, und $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq r\}$. Die Folge von Funktionen $(f_n|_D)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gleichmässig gegen $f|_D$.

Aufgabe 2. Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexwertiger Funktion auf einer Menge $D \subset \mathbb{C}$.

(a) Falls alle Funktionen f_n beschränkt sind und die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ strebt, dann ist auch f beschränkt.

(b) Finden Sie ein Beispiel, einer Funktionenfolge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkter Funktionen, welche punktweise gegen eine unbeschränkte Funktion strebt.

(c) Falls alle Funktionen f_n gleichmässig stetig sind und die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ strebt, dann ist auch f gleichmässig stetig.

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} x^n$$

und zeigen Sie Konvergenz der Potenzreihe bei den Punkten $-R, R \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Die Binomialreihe ist

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

definiert für $\alpha \in \mathbb{C}$ auf $x \in (-1, 1)$. Leiten Sie damit die Taylorreihen von $x \longmapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ und von arcsin um den Punkt 0 her, und berechnen Sie das Taylorpolynom explizit bis zum Grad 8.

Aufgabe 5. Sei $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für ψ eingeschränkt auf $x > 0$ die Ableitungen $\psi^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben sind durch $\psi^{(n)}(x) = \psi(x) f_n\left(\frac{1}{x}\right)$, wobei f_n ein Polynom von Grad $2n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass ψ auch unendlich oft differenzierbar bei $x = 0$ ist.

(c) Folgern Sie, dass ψ zwar unendlich differenzierbar ist, aber die Tayorreihe von ψ um 0 auf keinem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ gegen ψ konvergiert.

(d) Finden Sie für beliebige reelle Zahlen $a < b < c < d$ eine glatte Funktion φ auf $\mathbb{R}$, so dass φ gleich Null ist ausserhalb des Intervalls (a, d) und gleich 1 ist auf dem Intervall $[b, c]$.

Aufgabe 6. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius R durch

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

gegeben ist, falls dieser Grenzwert existiert.