Übungsserie 10

Abgabe bis zum 19. Mai

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden.

Aufgabe 0. (Einstiegsaufgabe, nicht bonusrelevant) Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x^2+y^2 < 4\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)} \,\mathrm{dvol}(x,y).$$

Aufgabe 1. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2-2x < 0\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D xy(x^2+y^2) \,\mathrm{dvol}(x,y).$$

Aufgabe 2. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1, x+y > 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{dvol}(x,y).$$

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit.

(a) Wie und warum ist das Integral

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x^T Ax) \,\mathrm{dvol}(x)$$

definiert?

(b) Zeigen Sie $I = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}$.

Hinweis: Entweder Cholesky-Zerlegung oder Spektralsatz aus der linearen Algebra.

Aufgabe 4. Für $x, y > 0$ ist die **Betafunktion** durch

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

gilt, wobei $\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gamma Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : (0,\infty)\times(0,1) \longrightarrow (0,\infty)\times(0,\infty)$ gegeben durch $(t,s) = \Phi(u,v) = (uv, u(1-v))$ ein Diffeomorphismus ist und berechnen Sie die Inverse explizit. Fassen Sie nachher $\Gamma(x)\Gamma(y)$ zu einem Doppelintegral zusammen.

(b) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}}dt$$

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}(D) > 0$. Der **Schwerpunkt** $\mathrm{Sp}(D) \in \mathbb{R}^n$ **von** D ist definiert als

$$\mathrm{Sp}(D) = \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \int_D (x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{dvol}(x_1,\ldots,x_n).$$

Der Schwerpunkt ist ein vektorwertiges Integral (siehe Serie 9 Aufgabe 5). Kurz schreiben wir: $\mathrm{Sp}(D) = \frac{1}{\mathrm{vol}(D)}\int_D x\,\mathrm{dvol}(x)$.

Aufgabe 5. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}(D) > 0$ und sei $\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von der Form $\varphi(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi(\mathrm{Sp}(D)) = \mathrm{Sp}(\varphi(D))$ gilt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass

$$\mathrm{Sp}(D) \in \mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = x\},$$

falls $\varphi(D) = D$ gilt.

Aufgabe 6. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Menge

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < (x-1)^2 + 4(y-2)^2 + 9(z-3)^2 < 4\}.$$

Hinweis: Rechnen Sie direkt nach oder benutzen Sie die Resultate aus Aufgabe 5.

Aufgabe 7. Sei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1, z^2 > x^2+y^2, z > 0\}$. Berechnen Sie mithilfe von Kugelkoordinaten das Integral

$$\int_D z\,\mathrm{dvol}(x,y,z).$$