Übungsserie 11

Abgabe bis zum 26. Mai

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden.

Aufgabe 0. (Einstiegsaufgabe, nicht bonusrelevant) Sei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der durch die Flächen

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 4\}, \qquad G_1 = \{(x,y,-1) \in \mathbb{R}^3\} \qquad \text{und} \qquad G_2 = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3\}$$

berandete Bereich.

(a) Zeichnen Sie die Menge Z.
(b) Finden Sie Parametrisierungen der drei Teilmannigfaltigkeiten M, G_1, G_2, so dass die zugehörigen Normalenvektoren nach aussen zeigen.
(c) Sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $F(x,y,z) = (z,y,x)$. Berechnen Sie $\int_{\partial Z} F \cdot dn$.
(d) Berechnen Sie die Oberfläche von Z: $\int_{\partial Z} dA$.
(e) Berechnen Sie das Volumen von Z: $\int_Z \operatorname{dvol}(x,y,z)$.

Aufgabe 1. (a) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich und $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes ∂B. Sei $n_\gamma(t) = R\gamma'(t)$ die Normale an B, wobei $R \in \mathrm{SO}(2)$ die Drehung in $\mathbb{R}^2$ im Uhrzeigersinn um Winkel $\frac{\pi}{2}$ um den Ursprung beschreibt.
Verwenden Sie den Divergenzsatz, um

$$\operatorname{vol}(B) = \frac{1}{2} \int_a^b \gamma(t) \cdot n_\gamma(t)\, dt,$$

zu zeigen.
Hinweis: Betrachten Sie das glatte Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x,y) = (x,y)$.

(b) Illustrieren Sie Teilaufgabe (a) im Falle einer Kreisscheibe $B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$.
(c) (Analoge Aussage in Dimension 3: Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{vol}(B) = \frac{1}{3} \int_{\partial B} F \cdot dn$$

für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(x,y,z) = (x,y,z)$ gilt.
(d) Illustrieren Sie Teilaufgabe (c) im Falle eines Balles $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2. Sei $a > 0$ eine reelle Zahl und sei $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die (geschlossene) Kurve gegeben durch

$$\gamma(t) = (a\sin(t), a\sin^2(t)\cos(t)).$$

Zeichnen Sie die Kurve und berechnen Sie den Flächeninhalt, welcher von γ eingeschlossen wird

(a) mit Hilfe von Aufgabe 1(a).
(b) direkt.

Aufgabe 3. Sei $S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$ und $T = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, d_S(x) \leq 1\}$, wobei $d_S(x) = \inf\{|x - y| \,|\, y \in S\}$ den minimalen Abstand von S zu $x \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Parametrisieren Sie ∂T und berechnen Sie anschliessend die Fläche.

Aufgabe 4. Verifizieren Sie den Satz von Gauss, also

$$\int_B \operatorname{div}(F)\,\mathrm{dvol}(x, y, z) = \int_{\partial B} F \cdot dn,$$

für folgende Bereiche und Vektorfelder:

(a) Seien $a, b, c > 0$, sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

und sei

$$B = [0, a] \times [0, b] \times [0, c].$$

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y, z) = (2xy, 3xy, ze^{x+y})$$

und sei $B = [0, 1]^3$.

(c) Sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$$

und sei

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y\}.$$

Aufgabe 5. Sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x, y, z) = (x\cos^2 z, y\sin^2 z, z\sqrt{x^2 + y^2})$ und sei $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Berechnen Sie das Flussintegral

$$\int_{\partial B} F \cdot dn.$$

Aufgabe 6. Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum und $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Definiere $G := \{A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \,|\, A(\mathbb{R}^2) = E\}$.

(a) Zeigen Sie, dass es genau zwei maximale Teilmengen $\mathcal{A}$ (bezüglich Inklusion) von G gibt, so dass $\det((A^{-1}B)|_{\mathbb{R}^2}) > 0$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Strukturen auf E äquivalent sind:
   - Die Wahl eines Normalenvektores zu E.
   - Die Wahl einer der beiden maximalen Teilmengen, die in (a) gefunden wurden.

   Jede dieser Wahl definiert eine *Orientierung* auf E.

(c) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche. Zeigen Sie, dass S genau dann orientierbar ist, falls ein stetiges normiertes Normalenfeld zu S existiert, also eine stetige Abbildung $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $n(p) \in (T_pS)^{\perp}$ mit $||n(p)|| = 1$ für alle $p \in S$.