Übungsserie 13

Keine Abgabe

Aufgabe 1. Finden Sie alle reellwertige Lösungen der folgenden Differentialgleichungen zuerst allgemein und dann mit den Anfangsbedingungen.

(a) $2y'' - 24y' + 72y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4,$
(b) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 7,$
(c) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$

Was ändert sich, wenn wir komplexwertige Lösungen erlauben?

Aufgabe 2. Finden Sie maximale reelle Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme

(a)
$$\sqrt{1-x^2}\,y' - y^2 = 1, \qquad y(0) = 0,$$

(b)
$$y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = x^4, \qquad y(1) = 1.$$

Aufgabe 3. (a) Verwenden Sie die Substitution $v = u/t$ zur Bestimmung der maximalen reellen Lösung des Anfangswertproblems
$$t^2 u'(t) - t u(t) - u^2(t) = t^2, \qquad u(1) = 1.$$

(b) Bestimmen Sie durch Separation der Variablen die maximale reelle Lösung des Anfangswertproblems
$$u'(t) - e^{u(t)} = 1, \qquad u(0) = -\log 2$$
durch geeignete Substitution.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der linearen Differentialgleichung
$$u'''(t) - 2u''(t) + 4u'(t) = 0.$$

Aufgabe 4. Eine Differentialgleichung

$$(\star) \qquad p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x) = 0$$

mit C^1-Funktionen p, q heisst *exakt*, falls das Vektorfeld $(x, y) \longmapsto (p(x, y), q(x, y))$ ein Potentialfeld ist: Also $p = \partial_x F$, $q = \partial_y F$, so dass y genau dann eine Lösung ist, wenn $x \longmapsto F(x, y(x))$ konstant ist.
Eine reellwertige Funktion M heisst *integrierender Faktor* für $(\star)$, falls $M(x, y) \neq 0$ für alle (x, y) und

$$(\star\star) \qquad M(x, y)p(x, y(x)) + M(x, y)q(x, y(x))y'(x) = 0$$

eine exakte Differenzialgleichung ist.

(a) Begründen Sie, dass falls M ein integrierender Faktor ist, dann auch aM für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein integrierender Faktor ist.
(b) Schreiben Sie $(\star)$ und $(\star\star)$ im Falle, wenn $q = 1$ und p linear in y ist ($p(x, y) = p_0(x) + p_1(x)y$ mit $p_0, p_1 : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar), und $M = M(x)$ unabhängig von y ist.
(c) Finden Sie einen integrierenden Faktor für den Fall aus (b).
(d) Lösen Sie die Differenzialgleichung $(\star\star)$ aus (b).
(e) Lösen Sie (c) und (d) im konkreten Falle der Differenzialgleichung

$$y' - \frac{3y}{x+1} = (x+1)^4, \qquad y(0) = 2.$$

Aufgabe 5. Sei $y^{(d)} + a_{d-1}(x)y^{(d-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ eine homogene lineare Differenzialgleichung mit stetigen Koeffizienten $a_i \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie

(a) $y \in C^d(I, \mathbb{C})$ ist genau dann eine komplexwertige Lösung wenn $x \longmapsto \operatorname{Re}(y(x))$ und $x \longmapsto \operatorname{Im}(y(x))$ Lösungen sind.
(b) Die komplexwertige Lösungen bilden einen Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$ über $\mathbb{C}$.
(c) Ist $B = \{y_1, \ldots, y_d\}$ eine Basis des Vektorraums $V \subset C^d(I, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ der reellwertigen Lösungen, dann ist B auch eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$.
(d) Ist $B = \{z_1, \ldots, z_d\}$ eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$ so ist eine Teilmenge von $\{\operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Im}(z_1), \ldots, \operatorname{Re}(z_d), \operatorname{Im}(z_d)\}$ eine Basis von V.

Aufgabe 6. Sei $x'(t) = F(t, x(t))$ eine Differenzialgleichung mit Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Die Picard-Abbildung von f bei (t_0, x_0) aus dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf ist definiert als

$$T(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\, ds.$$

Zeigen Sie, dass die Picard-Iterationen $y_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $y_0 = 0$ und $y_{n+1} = T(y_n)$ zum Anfangswertproblem

$$x'(t) + 2\sqrt{|x(t)|} = 2t, \qquad x(0) = 0$$

in keiner Umgebung von $t_0 = 0$ punktweise konvergiert. Wie ist dies mit dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf vereinbar?

Aufgabe 7. Zeigen Sie: Für jede Funktion $g \in C([0,1])$ existiert eine Funktion $f \in C([0,1])$ mit

$$f(x) - \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt = g(x)$$

für alle $x \in [0,1]$.

Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz.