Übungsserie 3

Abgabe bis zum 24. März

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Die *Operatornorm* einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist durch

$$\|A\|_{op} = \sup\left\{|Ax| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |x| \leq 1\right\}$$

definiert, wobei $|\cdot|$ für die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{R}^m$ steht.

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ eine Norm auf dem Vektorraum der Matrizen $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass

$$|Ax| \leq \|A\|_{\mathrm{op}} |x| \qquad \text{und} \qquad \|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}}.$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,k}(\mathbb{R})$ gilt.

(c) Sei $I_n \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ die Identitätsmatrix. Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $\|A\|_{op} < 1$ die Matrix $(I_n - A)$ invertierbar ist.

Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz.

Aufgabe 2. Seien X und Y topologische Räume und seien A_1 und $A_2 \subset X$ abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A_1 \cup A_2$. Seien $f_1 : A_1 \longrightarrow Y$ und $f_2 : A_2 \longrightarrow Y$ stetige Funktionen mit $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 \cap A_2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : X \longrightarrow Y$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{falls } x \in A_2 \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 3. Seien X, Y metrische Räume.

(a) Sei I eine beliebige Indexmenge. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von X mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$. Dann ist $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

(b) Sei I eine beliebige Indexmenge. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von wegzusammenhängenden Teilmengen von X mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$. Dann ist $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ wegzusammenhängend.

(c) Sei A wegzusammenhängend und $f : X \longrightarrow Y$ stetig. Zeigen Sie, dass das Bild $f(A)$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

(a) Angenommen X ist vollständig und A ist abgeschlossen. Zeigen Sie, dass der Teilraum A auch vollständig ist.

(b) Angenommen A ist vollständig. Zeigen Sie, dass $A \subset X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 5. (a) Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ zusammenhängend. Dann ist auch der Abschluss $\overline{Y} \subset X$ zusammenhängend.

(b) Skizzieren Sie den Teilraum $X \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$X = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(t, \sin(\tfrac{1}{t})) \mid t > 0\}$$

und zeigen Sie, dass X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 6. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie für welche Wahl von $a \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig, ableitbar, oder sogar stetig ableitbar ist. Stellen Sie eine Vermutung auf: Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f von Klasse C^n, für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$?

Aufgabe 7. Beweisen Sie, dass keine der metrischen Räume $\mathbb{R}^2, S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$, $\mathbb{R}$, $[0, 1]$, $[0, 1)$ homöomorph zueinander sind.

Hinweis: Welche dieser Räume bleiben zusammenhängend, wenn man 0,1 oder 2 Punkte entfernt?