Übungsserie 4

Abgabe bis zum 31. März

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei X eine Menge mit der diskreten Metrik versehen (siehe Serie 2 A4). Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn X endlich ist.

Aufgabe 2.
(a) Sei X ein kompakter metrischer Raum. Dann ist eine Teilmenge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen, wenn sie kompakt ist.
(b) Seien X, Y metrische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige und bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass falls X kompakt auch f^{-1} stetig ist.
(c) Finden Sie metrische Räume X, Y und eine bijektive, stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, so dass f^{-1} nicht stetig ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und die Ableitung $D_{(x_0,y_0)}f$ der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$
(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$
(c) $f(x, y) = \mathrm{Re}((x + iy)^7)$
(d) $f(x, y) = \cos(x)$
(e) $f(x, y) = y\cos(x) + x\sin(y)$

Zusatz: Mit Hilfe eines Computers, skizzieren Sie den Graphen von f in $\mathbb{R}^3$, jeweils zusammen mit dem Graphen der affinen Funktion $(x, y) \longmapsto f(1, 2) + D_{(1,2)}f(x - 1, y - 2)$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen.
(a) Sei $f_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben durch die Multiplikation mit einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, also $f_1(x) = Ax$.
(b) Sei $f_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.
(c) Sei $f_3 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch die Euklidische Norm im Quadrat, also $f_3(x) = |x|^2$.
(d) Sei $f_4 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch den Kehrwert der Norm im Quadrat, also $f_4(x) = \frac{1}{|x|^2}$.

(e) Seien $f, g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktionen und

$$\varphi(x) = f(x) \cdot g(x),$$

wobei $\cdot$ das Standardskalarprodukt f_2 bezeichnet. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ und jede Richtung $v \in \mathbb{R}^m$

$$D_x\varphi(v) = g(x) \cdot D_x f(v) + f(x) \cdot D_x g(v)$$

gilt.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) f ist stetig.

(b) Die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ existieren überall (berechnen Sie sie!). Sind sie stetig?

(c) Die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ existiert für alle $v \in \mathbb{R}^2$.

(d) f ist trotzdem nicht differenzierbar.

Aufgabe 6. (a) Ein metrischer Raum X heisst *total beschränkt*, falls es für jedes $\epsilon > 0$ endlich viele Bälle $B_\epsilon(x_1), \ldots, B_\epsilon(x_k)$ gibt, welche X überdecken, also $X = \bigcup_{i=1}^k B_\epsilon(x_i)$. Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum total beschränkt ist.

(b) Ein metrischer Raum X heisst *separabel*, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Beispielsweise ist $\mathbb{R}$ separabel, da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ abzählbar und dicht ist. Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum separabel ist.

Hinweis: Serie 5 Aufgabe 1 aus dem ersten Semester.