Übungsserie 5

Abgabe bis zum 14. April

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Funktionen definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x\sin y \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2-y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Ableitung $D_{(x,y)}(g\circ f) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auf zwei Arten:

(a) indem Sie zuerst explizit die Verknüpfung $g\circ f$ berechnen und ableiten,

(b) unter Verwendung der Kettenregel.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = xyz + 3e^x y$$

im Punkt $(0,1,3) \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie Ihre Antwort in Form eines Vektors der Länge 1 an.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Taylor-Approximation folgender Funktionen:

(a) $e : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $e(x,y) = \exp(x+y)$ um den Punkt $(0,0)$ bis Ordnung 2.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^3z - 3yz + 2y - 5x^2 + 2x^4 - 1$ um den Punkt $(0,0,0)$ bis Ordnung 2.

(c) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ um den Punkt $(0,0)$ bis Ordnung 3.

(d) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = y\exp(x)$ um den Punkt $(1,2)$ bis Ordnung 3.

Definition. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y heisst *Lipschitz-stetig*, falls es eine reelle Konstante $L > 0$ gibt, so, dass

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heisst *lokal Lipschitz-stetig*, falls für jedes $x_0 \in X$ ein $r > 0$ existiert, so dass $f|_{B_r(x_0)}$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass f lokal Lipschitz-stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls U konvex und die Ableitung beschränkt ist, dann ist f sogar Lipschitz-stetig.

Aufgabe 5. (Notwendigkeit der Annahmen im Satz von Schwarz). Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass alle partiellen zweiten Ableitungen von f existieren.

(d) Zeigen Sie, dass $\partial_x \partial_y f(0,0) \neq \partial_y \partial_x f(0,0)$ gilt.