Übungsserie 6

Abgabe bis zum 21. April

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$ mit reellen Parametern $a, b \in \mathbb{R}$. Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte in Abhängigkeit von a, b.

Aufgabe 2. Für reelle Zahlen $\alpha \geq 0$ kennen wir das Integral

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Leiten Sie daraus den Wert für das Integral

$$\int_0^1 \log(x)^4 x^2 dx$$

her.

Hinweis: Betrachten Sie das erste Integral als Parameterintegral.

Aufgabe 3. In der Vorlesung haben Sie elliptische Integrale 1. und 2. Art besprochen:

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}} \qquad \text{und} \qquad E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}\, dt,$$

wobei $-1 < x < 1$ ist.

Ausserdem haben Sie die Gleichung $xE'(x) = E(x) - K(x)$ bewiesen.

(a) Zeigen Sie die Gleichung

$$xK'(x) = \frac{E(x)}{1-x^2} - K(x).$$

Hinweis: Sei $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $h(t) = \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}$. Zeigen Sie

$$x^2 h'(t) = \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t} - \frac{1-x^2}{(1 - x^2 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass E der Differentialgleichung

$$(x^2-1)xE''(x) + (x^2-1)E'(x) - xE(x) = 0$$

genügt.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine *Schleife* $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ ist ein Weg, so dass $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(a) Sei S das Bild einer Schleife in U. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $x \in S$ eine Schleife $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ mit demselben Bild S gibt, so dass $\gamma(a) = \gamma(b) = x$.

(b) Sei S das Bild einer stetig differenzierbaren Schleife. Gibt es für jeden Punkt $x \in S$ eine stetig differenzierbaren Schleife $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ mit demselben Bild S, so dass $\gamma(a) = \gamma(b) = x$ gilt?

(c) Sei $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass v genau dann konservativ ist, wenn für alle stückweise stetig differenzierbaren Schlaufen γ in U

$$\int_\gamma v \cdot dx = 0$$

gilt.

Aufgabe 5. Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda x e^y \\ (y + 1 + x^2)e^y \end{pmatrix}$$

konservativ? Bestimmen Sie für diese Werte ein Potential von v.