Übungsserie 7

Abgabe bis zum 28. April

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Zeichnen Sie die Menge aller Nullstellen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$,
(b) $f(x, y) = y^2(1 - x) - x^3$,
(c) $f(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$,
(d) $f(x, y) = xy(x + y - 1)$,
(e) $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$.

Sie können dazu auch eine Software zur Hilfe benutzen. An welchen Punkten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ folgt mit dem Satz zur impliziten Funktion, dass die Funktion lokal nach x (beziehungsweise nach y, nach beiden oder eventuell nach gar keiner Variabel) auflösbar ist? Zeichnen Sie diese Punkte in ihrer Skizze (am besten mit vier verschiedenen Farben) ein.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1, \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1, \end{cases}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 1, 0)$ nach den Variablen u und v auflösbar ist und bestimmen Sie die Ableitungen $D_{(0,1,1)}u$ und $D_{(0,1,1)}v$ der so definierten impliziten Funktionen $u = u(x, y, z)$ und $v = v(x, y, z)$.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = y^2(1 - x) - x^3$ aus Aufgabe 1b) etwas vertiefter.

(a) Zeigen Sie, dass wir aus dem Satz zur impliziten Funktion nicht folgern können, dass f in einer Umgebung von $(0, 0)$ nach der Variabel x auflösbar ist.
(b) Zeigen Sie, dass aber die Gleichung $f(x, y) = 0$ sogar überall eindeutig nach x aufgelöst werden kann.
Hinweis: Analysieren Sie die Abbildung $x \longmapsto \frac{x^3}{1-x}$ auf einem geeigneten Definitionsbereich.

Aufgabe 4 (Kugelkoordinaten)**.** Die Abbildung $\Phi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

nennt man *Kugelkoordinaten*.

(a) Skizzieren Sie die Bilder von $r \longmapsto \Phi(r,\theta_0,\varphi_0)$, $\theta \longmapsto \Phi(r_0,\theta,\varphi_0)$ und $\varphi \longmapsto \Phi(r_0,\theta_0,\varphi)$ für einige feste $r_0 \in (0,\infty)$, $\theta_0 \in (0,\pi)$, $\varphi_0 \in (-\pi,\pi)$.

(b) Was ist das Bild von Φ?

(c) Zeigen Sie, dass $\det(D_{(r,\theta,\varphi)}\Phi) = r^2\sin\theta$ gilt.

(d) Folgern Sie, dass die Abbildung Φ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist.

Aufgabe 5. Sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und (x_0, y_0) eine Nullstelle von F, so dass $\partial_y F(x_0,y_0) \neq 0$ ist. Nach dem Satz zur impliziten Funktion (11.1 und 11.2) gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : B_r(x_0) \longrightarrow B_s(y_0)$, so dass für alle $x, y \in B_r(x_0) \times B_s(y_0)$ die Gleichung $F(x,y) = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn $f(x) = y$ ist. Beweisen Sie die Formel für die zweite Ableitung

$$f''(x) = -\frac{(\partial_y F)^2(\partial_x\partial_x F) - 2(\partial_y F)(\partial_x\partial_y F)(\partial_x F) + (\partial_y\partial_y F)(\partial_x F)^2}{(\partial_y F)^3}(x, f(x)).$$

Betrachten Sie Hilfsfunktionen

$$h(x) = (x, f(x)) \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = -\frac{\partial_x F}{\partial_y F}(x,y)$$

auf geeigneten Definitionsbereichen und wenden Sie die Kettenregel an.

Aufgabe 6. Sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$F(x,y,z) = z^3 + 3z + xy - 2.$$

(a) Benutzen Sie in dieser Teilaufgabe den Satz zur impliziten Funktion noch nicht. Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau ein $z \in \mathbb{R}$ mit $F(x,y,z) = 0$ existiert. Welches z gehört zu $(x,y) = (-1,2)$?
Hinweis: Analysieren Sie die Abbildung $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $h(z) = z^3 + 3z$.

(b) Sei $f(x,y) = z$, die in Teilaufgabe eindeutig bestimmte Lösung, so dass

$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$

ist. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist und berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(-1,2)$.