Übungsserie 8

Abgabe bis zum 5. Mai

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$$

eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum T_pM bei $p = (1, 1, \sqrt{3})$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die abgeschlossene Sphäre

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = 9x^2 + y^2 + 16z^2$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf $\mathbb{S}^2$.

Aufgabe 3. Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ der Quader $[0, 1]^2$ und $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x$. Berechnen Sie das zweidimensionale Integral

$$\int_Q f \, dvol$$

direkt mit der Definition des mehrdimensionalen Riemann-Integrals.

Aufgabe 4. Wir betrachten die beiden Mengen

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 1\}$$
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 4y^2 = 1\}$$

in $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die beiden Mengen G und E nicht schneiden.

(b) Berechnen Sie den minimalen Abstand, die zwei Punkte $p \in G$ und $q \in E$ haben können.

Hinweis: Benutzen Sie Lagrange Multiplikatoren mit einer Nebenbedingung $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (x-1)^2 - (y-2)^2.$$

Bestimmen Sie die Extrema von f auf dem Quadrat $Q = [0,2] \times [0,2]$. Diskutieren Sie dabei zunächst separat Extrema auf dem Inneren von Q, auf den einzelnen Seiten ohne die jeweiligen Eckpunkte, und auf den Eckpunkten.

Aufgabe 6. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf

(a) dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,

(b) der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 7. Seien $f_t\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen definiert durch

$$f_t(x,y,z) = (z - tx)(x^2 + y^2 - z^2 + 1)$$

für einen reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) Beschreiben Sie die Mengen $N_t = f_t^{-1}(\{0\})$ geometrisch, in Abhängigkeit von t. Versuchen Sie einen Zusammenhang zwischen den Mengen N_t,

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - tx = 0\} \qquad \text{und} \qquad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0\}$$

zu erkennen.

(b) Bestimmen Sie die Menge T aller Parameter $t \in \mathbb{R}$, für welche die Menge N_t die Voraussetzungen des Satzes vom maximalen Rang (Theorem 11.16 im Skript) erfüllt. Welche Dimension hat N_t für $t \in T$? Gibt es $t \in \mathbb{R} \setminus T$, sodass N_t dennoch eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist?

Aufgabe 8. Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass zwei Punkte $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ genau dann maximalen Abstand haben, wenn $x = -y$ gilt. Betrachten Sie hierzu die Funktion $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(x,y) \longmapsto ||x-y||^2.$$

Hinweis: Benutzen Sie Lagrange Multiplikatoren mit einer Nebenbedingung $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$.