Übungsserie 9

Abgabe bis zum 12. Mai

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden.

Aufgabe 0. (Einstiegsaufgabe, nicht bonusrelevant)

(a) Sei $D = [0,2] \times [0,1]$. Berechnen Sie
$$\int_D (x^3 + 3x^2y + y^3)\,\mathrm{dvol}(x,y).$$

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$ und (π,π). Berechnen Sie
$$\int_D x\cos(x+y)\,\mathrm{dvol}(x,y).$$

(c) Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, y > 1, x + y < 3\}$. Berechnen Sie
$$\int_D \frac{1}{(x+y)^3}\,\mathrm{dvol}(x,y).$$

Aufgabe 1. (a) Berechnen Sie
$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx.$$

(b) Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x, x + y < 2\}$. Berechnen Sie
$$\int_D (x-y)(x+y-2)\,\mathrm{dvol}(x,y).$$

(c) Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$. Berechnen Sie
$$\int_D (x^3 + y^3)\,\mathrm{dvol}(x,y).$$

Aufgabe 2. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x + y > 0\}$. Berechnen Sie mithilfe der mehrdimensionalen Substitutionsregel (Satz 12.56) das Integral
$$\int_D \frac{x+y}{\sqrt{2}}\,\mathrm{dvol}(x,y)$$
durch Polarkoordinaten (Kapitel 11.1.3 und Beispiel 12.57).

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lebesgue-Nullmenge ist, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Familie $(Q_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *abgeschlossener* (anstatt *offener* wie in der Definition im Skript) Quader gibt, mit

$$N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l \qquad \text{und} \qquad \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) < \epsilon.$$

Aufgabe 4. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $B_1, \ldots, B_m \subset Q$ eine Zerlegung von Q in Jordan-messbare Mengen, d.h. $\bigcup_{i=1}^m B_i = Q$ und $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \varnothing$ für alle $i \neq j$.
Zeigen Sie: Eine beschränkte Funktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes $i = 1, \ldots, m$ die Einschränkung $f|_{B_i} : B_i \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_Q f \operatorname{dvol}(x) = \sum_{i=1}^m \int_{B_i} f \operatorname{dvol}(x).$$

Hinweis: Lebesgue-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit (Satz 12.23).

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Eine Funktion $F = (F_1, \ldots, F_m) : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heisst Riemann-integrierbar, falls jede Komponente $F_i : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir

$$\int_B F \operatorname{dvol}(x) = \left(\int_B F_1 \operatorname{dvol}(x), \ldots, \int_B F_m \operatorname{dvol}(x) \right).$$

Aufgabe 5. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $F : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass F genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn für jede lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ die Komposition $\lambda \circ F : B \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass

$$\lambda \left(\int_B F \operatorname{dvol}(x) \right) = \int_B \lambda \circ F \operatorname{dvol}(x)$$

gilt, falls $F : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Riemann-integrierbar ist.[1]

Aufgabe 6. Sei $X \subset [0, 1]$ die Menge aller reellen Zahlen in deren Dezimalbruchentwicklung keine Ziffer 8 vorkommt.[2] Zeigen Sie:

(a) X ist eine Lebesgue-Nullmenge,
(b) X ist nicht abzählbar,
(c) $X \times X \subset [0, 1]^2$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.

[1]Aufgabe 5 gibt eine alternative Definition von Riemann-integrierbarkeit für Abbildungen $F : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ an. Das Integral $v = \int_B F \operatorname{dvol}(x) \in \mathbb{R}^m$ wird dann definiert als der eindeutige Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\lambda(v) = \int_B \lambda \circ F \operatorname{dvol}(x)$$

für jede lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$. Der Vorteil dieser Definition ist, dass sie Koordinaten-frei ist.

[2]Die Dezimalbruchentwicklung ist nicht immer eindeutig. Zum Beispiel ist $0.8 = 0.79999\ldots$. Immer wenn eine Dezimalbruchentwicklung ohne 8 existiert, dann definieren wir, dass die Zahl in X liegt, also zum Beispiel $0.8 \in X$.