



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter S. Jossen

12. August 2020

# Analysis I & II Prüfung

CHAB | ITET | MATH | PHYS

---

## Allgemeine Information

- Couverts nie zukleben.
  - Legen Sie Ihre Legi offen mit Photo gegen vorne orientiert auf den Tisch.
  - Beim WC-Besuch muss eine Maske getragen werden.
  - Während der Prüfung besteht keine Maskentragepflicht.
  - Mobiltelefone und elektronische Geräte auf Flugmodus und im Gepäck verstauen.
  - Schreiben Sie ausschliesslich mit blauen oder schwarzen Füller/Kugelschreiber. Kein Bleistift, keine rote oder grüne Farbe, kein Tipp-Ex.
  - Schreiben Sie leserlich. Was nicht eindeutig lesbar ist, wird konsequent ignoriert.
  - Zugelassene Hilfsmittel: Wörterbuch. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
  - Prüfungsdauer: 120 Minuten (Teil A) + 120 Minuten (Teil B). Dazwischen 30 Minuten Pause. Während der Pause und nach der Prüfung bitte nicht zu laut, es werden andere Prüfungen in der näheren Umgebung geschrieben!
- 

## Formelsammlung

Notation.

$\mathbb{Z}$  = ganze Zahlen

$\mathbb{R}$  = reelle Zahlen

$\mathbb{R}_{>0}$  =  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\log$  = der natürliche Logarithmus  $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Trigonometrische Formeln.**

Wichtige Funktionswerte:

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$\alpha = 0$	0	1	0
$\alpha = \pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\alpha = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\alpha = \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
$\alpha = \pi/2$	1	0	$\nexists$

Addition:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \quad \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.$$

Doppelwinkel:

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a, \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

Halbwinkel:

$$\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}.$$

Multiplikationsformeln:

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}, \\ \sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}, \\ \sin a \cos b &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}. \end{aligned}$$

Euler'sche Formeln ( $\forall z \in \mathbb{C}$ ):

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

**Nützliche Koordinatenwechsel für dreidimensionale Integrale.**Zylinderkoordinaten ( $r \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ ):

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z), \quad dx dy dz = r dr d\varphi dz.$$

Kugelkoordinaten ( $r \in (0, \infty)$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ):

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta), \quad dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

### Ableitung trigonometrischer Funktionen

$$\begin{array}{lll} \sin'(x) = \cos(x) & \cos'(x) = -\sin(x) & \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 \\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

### Spezielle Funktionen.

Die Gamma-Funktion  $\Gamma$  ist für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) > 0$  durch das konvergente uneigentliche Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx$$

gegeben.

### Vektorfelder.

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

$$\begin{array}{ll} \text{Divergenz von } F \text{ (Quellenstärke):} & \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \partial_i F_i, \\ \text{Rotation von } F, \text{ im Fall } n = 2: & \operatorname{rot} F = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \\ \text{Rotation von } F, \text{ im Fall } n = 3: & \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \end{array}$$