Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter S. Jossen 27. Januar 2021

Analysis I & II Prüfung

MATH — PHYS

Allgemeine Information

- **Kuverts nie zukleben.**
- Legen Sie Ihre Legi offen mit Photo gegen vorne orientiert auf den Tisch.
- Während der Prüfung besteht Maskentragepflicht! Die Maske kann kurz abgelegt werden, um etwas zu essen oder zu trinken.
- Mobiltelefone und elektronische Geräte auf Flugmodus und im Gepäck verstauen.
- Schreiben Sie ausschliesslich mit blauen oder schwarzen Füller/Kugelschreiber. Kein Bleistift, keine rote oder grüne Farbe, kein Tipp-Ex.
- Schreiben Sie leserlich. Was nicht eindeutig lesbar ist, wird konsequent ignoriert.
- Zugelassene Hilfsmittel: Wörterbuch. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Prüfungsdauer: 120 Minuten (Teil A) + 120 Minuten (Teil B). Dazwischen 30 Minuten Pause. Bitte entweder sitzen bleiben oder das Gebäude möglichst ganz verlassen.

Formelsammlung

Notation.

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \text{ganze Zahlen} \\
\mathbb{R} &= \text{reelle Zahlen} \\
\mathbb{R}_{>0} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \\
\log &= \text{der natürliche Logarithmus } \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Trigonometrische Formeln.

Wichtige Funktionswerte:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\alpha = 0$	0	1	0
$\alpha = \pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\alpha = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\alpha = \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\alpha = \pi/2$	1	0	$\nexists$

Addition:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \qquad \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.$$

Doppelwinkel:

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a, \qquad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

Halbwinkel:

$$\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}, \qquad \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}.$$

Multiplikationsformeln:

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}, \\ \sin a \sin b &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}, \\ \sin a \cos b &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}. \end{aligned}$$

Euler'sche Formeln ($\forall z \in \mathbb{C}$):

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Nützliche Koordinatenwechsel für dreidimensionale Integrale.

Zylinderkoordinaten ($r \in (0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$):

$$(x, y, z) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z), \qquad dxdydz = rdrd\phi dz.$$

Kugelkoordinaten ($r \in (0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\theta \in (0, \pi)$):

$$(x, y, z) = (r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta), \qquad dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Ableitung trigonometrischer Funktionen

$$\begin{array}{ccc} \sin'(x) = \cos(x) & \cos'(x) = -\sin(x) & \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 \\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Vektorfelder.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

$$\begin{array}{rl} \text{Divergenz von } F \text{ (Quellenstärke) :} & \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i, \\ \text{Rotation von } F\text{, im Fall } n = 2\text{:} & \operatorname{rot} F = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \\ \text{Rotation von } F\text{, im Fall } n = 3\text{:} & \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \end{array}$$