Frage 1. Geben Sie jeweils ein Beispiel einer reellwertigen Funktion an, oder begründen Sie, warum kein solches existiert:

(a) Eine stetige surjektive Funktion $[0,1] \to [0,1)$.

(b) Eine gleichmässig stetige Funktion, welche nicht Lipschitz-stetig ist.

(c) Eine unbeschränkte, stetige Funktion definiert auf einem abgeschlossenen Intervall.

(d) Eine stetige surjektive Funktion $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\} \to \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$.

Lösung:

(a) Nicht möglich. Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion muss kompakt sein, $[0,1)$ ist aber nicht kompakt.

(b) Beispiel: Die Wurzelfunktion $\sqrt{-} : [0,1] \to [0,1]$ ist gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

(c) Beispiel: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x$.

(d) Nicht möglich: Der Definitionsbereich ist ein Annulus, er ist zusammenhängend. Der Zielbereich ist nicht zusammenhängend. Doch das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Funktion muss zusammenhängend sein.

Punkteverteilung:

2 Punkte pro Teilaufgabe

2P funktionierendes Beispiel ohne Begründung

0P für richtige Ja/Nein Antwort ohne Begründung/Beispiel

Frage 2. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper.

(a) Wann ist $(K, \leq)$ vollständig?

(b) Ist $\mathbb{Q}$ vollständig? Begründen Sie.

(c) Begründen Sie, warum jede von oben beschränkte, nichtleere Teilmenge eines vollständigen Körpers K ein Supremum in K besitzt.

Lösung:

(a) Seien X, Y nichtleere Teilmengen von K derart, dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt, dann gibt es ein $c \in K$, so dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq c \leq y$ gilt.

(b) Nein. Für $X = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$ und $Y = \{y \in \mathbb{Q} : y > 0, y^2 > 2\}$ gibt es kein $c \in \mathbb{Q}$, welches X, Y teilt.

(c) Sei A eine nichtleere, von oben beschränkte Teilmenge in K. Wir wählen $X = A$ und $Y = \{y \in K : y \geq a \text{ für alle } a \in A\}$, die Menge aller oberen Schranken. Die Teilmenge Y ist nicht leer, weil A von oben beschränkt ist. Aus der Vollständigkeit von K gibt es ein $c \in K$, so dass $a \leq c \leq y$ für alle $a \in A$ und $y \in B$ gilt. Die Ungleichungen der Form $a \leq c$ zeigen, dass c eine obere Schranke von A ist. Die Ungleichungen der Form $c \leq y$ zeigen, dass es keine strikt kleinere obere Schranke von A gibt als c. In anderen Worten, $c = \sup A$.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

2P *nichtleere* fehlt

0P Vollständigkeit mit Cauchy

(b) 2 Punkte

1P *Nein.*

1P Begründung (auch durch Cauchy-Folge auch erlaubt, da $\mathbb{Q}$ auch ein metrischer Raum ist)

(c) 4 Punkte

2P Existenz des maximalen Element

2P Anwendung des Vollständigkeitsaxiom

Frage 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale. Für uneigentliche Grenzwerte benutzen Sie die Notation $\pm\infty$ anstatt *existiert nicht*.

Nur die Antwort zählt.

$$A = \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad B = \int_{-1}^1 x^2\left(e^x + 2x^2 - e^{-x}\right)\,dx,$$

$$C = \int_0^1 \frac{2}{x(x-2)}\,dx, \qquad D = \int_{-1}^1 \frac{x-2}{x-3}\,dx.$$

Lösung:

(a)

$$A = \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \left[-2\cos(\sqrt{x})\right]_{x=0}^1 = 2 - 2\cos(1).$$

(b) Die Funktion $x \mapsto x^2(e^x - e^{-x})$ ist ungerade. Darum ist

$$B = \int_{-1}^1 x^2 \cdot 2x^2\,dx = \frac{4}{5}.$$

(c)

$$C = \int_0^1 \frac{2}{x(x-2)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = -\infty$$

da das erste Integral endlichen Wert hat und das zweite $-\lim_{a\to 0}\log(a) = -\infty$.

(d)

$$D = \int_{-1}^1 \frac{x-2}{x-3}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{(x-3)+1}{x-3}\,dx = 2 + \int_{-1}^1 \frac{1}{x-3}\,dx = 2 + \left[\log(|x-3|)\right]_{x=-1}^1.$$

Also $D = 2 + \log(2) - \log(4) = 2 - \log(2)$

Punkteverteilung:

8 Punkte

je 2P: keine Teilpunkte ausser bei c):

1P $\pm\infty$

0P ∞ oder $+\infty$

Frage 4. Existieren die folgenden Grenzwerte? Falls ja, berechnen Sie sie. Für uneigentliche Grenzwerte benutzen Sie die Notation $\pm\infty$ anstatt *existiert nicht*.

Nur die Antwort zählt.

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sin(x^2) - \sin^2(x)}, \qquad B = \lim_{\substack{x\to 5 \\ x<5}} \frac{2 - x - 6x^2 + x^3}{5 - x},$$

$$C = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{\sin(\pi x)}, \qquad D = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \text{wobei } \begin{cases} a_0 = 10, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 7} - 1. \end{cases}$$

Lösung:

(a) Aus $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ folgt $\sin(x^2) = x^2 - O(x^6)$ und $\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)$ und darum

$$\frac{x^4}{\sin(x^2) - \sin^2(x)} = \frac{x^4}{x^2 + O(x^6) - x^2 + \frac{x^4}{3} + O(x^6)}.$$

Wir schliessen $A = 3$.

(b) Wir sehen schnell, dass wenn wir 5 im Zähler einsetzen, wir eine negative Zahl erhalten. Weil wir im Nenner ausserdem 5 von unten approximieren, ist der Nenner positiv für $x < 5$. Darum ist der Grenzwert ein uneigentlicher Grenzwert $B = -\infty$.

(c) Mit l'Hopital erhalten wir

$$C = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{\sin(\pi x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{\pi\cos(\pi x)} = -\frac{1}{\pi}.$$

(d) Die Folge ist beschränkt: Man kann per Induktion zeigen, dass a_n fallend ist und von unten durch 2 beschränkt ist. Der Grenzwert muss die Gleichung $x = \sqrt{x+7} - 1$ erfüllen. Also $(x+1)^2 = x + 7$. Wir folgern $0 = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. Doch nur $x = 2$ ist eine erlaubte Lösung. Es folgt $D = 2$.

Punkteverteilung:

8 Punkte

je 2P: keine Teilpunkte ausser bei b):

- **1P** $\pm\infty$
- **0P** ∞ oder $+\infty$

Frage 5. Es seien a, b, c positive, reelle Zahlen. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \sqrt[3]{abc}$$

gilt. Sie dürfen alle Ihnen bekannten Sätze und Techniken (beispielsweise die Regel von l'Hopital) verwenden.

Lösung: Wir nutzen $x = \exp(\log(x))$ für $x > 0$. Also

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \exp\left(n\log\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)\right) = \exp\left(\frac{\log\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right)-\log(3)}{\frac{1}{n}}\right)$$

Mit l'Hopital und $\frac{d}{dn}\left(\sqrt[n]{a}\right) = -\frac{\sqrt[n]{a}\log(a)}{n^2}$ folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{-\frac{\sqrt[n]{a}\log(a)+\sqrt[n]{b}\log(b)+\sqrt[n]{c}\log(c)}{n^2(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c})}}{-\frac{1}{n^2}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\sqrt[n]{a}\log(a)+\sqrt[n]{b}\log(b)+\sqrt[n]{c}\log(c)}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}\right)\end{aligned}$$

Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ ist aus der Vorlesung bekannt. Der gesuchte Grenzwert ist also

$$\exp\left(\frac{\log(a)+\log(b)+\log(c)}{1+1+1}\right) = \exp\left(\frac{\log(abc)}{3}\right) = \sqrt[3]{abc}.$$

Punkteverteilung:

8 Punkte

1P $x = \exp(\log(x)$ richtig anwenden

1P Grenzwert in den exp nehmen

2P l'Hopital richtig anwenden

2P $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ nutzen

2P Folgerung

Frage 6.

(a) Was besagt der (ein-dimensionale) Mittelwertsatz?

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f höchstens einen Fixpunkt (also $f(x_0) = x_0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$) haben kann.

(c) Finden Sie eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber so dass f zwei Fixpunkte hat.

Lösung:

(a) Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(b) Sei f wie in der Aufgabe. Nehmen wir an, es gibt zwei verschiedene Fixpunkte, also $f(x_0) = x_0 < f(x_1) = x_1$ mit $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Mit dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x_0, x_1)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1.$$

Dies widerspricht der Annahme an f, dass $f'(x) \neq 1$ für $x \in \mathbb{R}$

(c) Zum Beispiel $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f = \operatorname{sgn}$. Wir haben Fixpunkte $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$, sowie $f' = 0$.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

1P Bedingungen (mit bis zu einem kleinem Fehler)

1P Aussage

(b) 4 Punkte

2P Mittelwertsatz richtig angewendet

2P Schlussfolgerung

(c) 2 Punkte

Frage 7.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe für alle $x \in [2,3]$ absolut konvergiert.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$$

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_2^3 f(x)\,dx$ bis auf 2 Nachkommastellen genau. Die Abschätzung muss nicht begründet werden, nur der Rechenweg, wie man die Zahl erhalten hat.

Lösung:

(a) Wir berechnen den Konvergenzradius von $\sum a_n z^n$ für $a_n = \frac{1}{n2^n}$ mit dem Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$

Mit $z = (x-3)$ erhalten wir, dass die Potenzreihe maximal für $x \in (1,5)$ konvergiert.

(b) Gliedweise Integration führt zu einer alternierenden Reihe:

$$\int_2^3 f(x)\,dx = 0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^{n+1}}{n(n+1)2^n} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{24} - \frac{1}{96} + \text{ kleinere Terme }.$$

Das Integral ist darum etwa $\approx -0.25 + 0.04 - 0.01 = -0.22$

Punkteverteilung:

(a) 3 Punkte

1P Abschätzung

2P Majorantenkriterium o.ä. richtig angwendet

Beweis Konvergenz: 2 Punkte

(b) 5 Punkte

1P Vertauschung Summe und Integral

1P Korrekte Reihe

2P Resultat

1P Genug Terme

Frage 8. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.

(a) Wann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge? Geben Sie die Definition an.

(b) Sei $0 < r < 1$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, welche $|x_n - x_{n+1}| \leq r^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge in $\mathbb{R}$ definiert durch $x_0 = 0, x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + \frac{2x_{n-1}}{3}$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Lösung:

(a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Cauchy-Folge, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_m, x_n) < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt.

(b) Sei $\epsilon > 0$ Sei $m \geq n$. Aus $|x_n - x_{n+1}| \leq r^n$ folgt nach mehrmaligem Anwenden der Dreiecksungleichung:

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \leq r^n + r^{n+1} + \cdots + r^m \leq \frac{r^n}{1-r},$$

wobei wir im letzten Schritt die geometrische Reihe benutzt haben. Weil $0 < r < 1$ ist, gibt es ausserdem ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $r^n < \epsilon(1 - r)$ für alle $n \geq N$ ist. Dies beweist, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(c) Die rekursive Definition impliziert

$$|x_n - x_{n+1}| = \tfrac{2}{3}|x_{n-1} - x_n|.$$

Mit $|x_0 - x_1| = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$ finden wir induktiv $|x_n - x_{n+1}| = \left(\frac{2}{3}\right)^n |x_{n-1} - x_n|$. Mit Teilaufgabe (b) ist (x_n) also eine Cauchy-Folge. Weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert die Folge (x_n).

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

(b) 4 Punkte

je 1P Dreiecksungleichung / geometrische Reihe / Wahl von N / Folgerung

0P $|x_{n+1} - x_n| \to 0$

(c) 2 Punkte

1P ist eine Cauchy Folge

1P Cauchy Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren

Frage 9. Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die stetig differenzierbare Funktion gegeben durch

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

(a) Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Ableitung $Df(x, y)$ invertierbar?

(b) Besitzt die Funktion f eine stetig differenzierbare Inverse?

Lösung:

(a) Wir berechnen die Ableitung:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Weil $\det Df(x, y) = 4(x^2 + y^2)$ ist und $(x, y) \neq (0, 0)$ ist, verschwindet die Determinante nie.

(b) f ist nicht injektiv: $f(1, 1) = (0, 2) = f(-1, -1)$, kann darum keine globale Inverse haben.

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

1P Ableitung

2P Determinante

2P richtige Folgerung

nur 1P Resultat ohne Determinante

(b) 3 Punkte

1P *Nein*

2P nicht injektiv

nur 1P lokal umkehrbar

Frage 10.

(a) Was besagt der Satz von Stokes?

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $F(x, y, z) = (y, xz^3, -zxy^3)$ und $C \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kreis gegeben durch die Bedingungen $x^2 + y^2 = 4$ und $z = -3$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_C F\, dt,$$

wobei C von oben betrachtet die Orientierung im Gegenuhrzeigersinn hat.

Lösung:

(a) Sei F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Sei $S \subseteq U$ eine glatt berandete, kompakte und orientierbare Fläche. Dann gilt

$$\int_S \operatorname{rot}(F)\, dn = \int_{\partial S} F dt.$$

(b) Wir wollen Stokes auf die Kreisscheibe $D = \{(x, y, -3) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ anwenden, da $\partial D = C$. Die Rotation von F ist $\operatorname{rot}(F) = (*, *, z^3 - 1)$ und der Normalenvektor an D ist $n = (0, 0, 1)$. Wir schliessen mit Stokes:

$$\int_C F\, dt = \int_D \operatorname{rot}(F)\, dt = \int_D ((-3)^3 - 1)\, dS = -28 \cdot 2^2\pi = -112\pi.$$

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

1P Bedingungen (1 kleiner Fehler erlaubt)

1P Formel

(b) 6 Punkte. Zwei Möglichkeiten A, B (mit / ohne Stokes)

1P A: rot(F)

1P A: Normalvektor

2P A: Stokes Anwendung

2P A: Rechnung

2P B: Parametrisierung

2P B: Herleitung

2P B: Resultat

Frage 11. Seien $0 < h_1 < h_2$ reelle Zahlen. Bestimmen Sie die z-Koordinate des Schwerpunktes des Kegelstumpfes

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ h_1 \leq z \leq h_2\}.$$

Aus der Physik wissen Sie, dass diese durch

$$S_z = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \int_E z\, dx\, dy\, dz$$

gegeben ist. Sie wissen ebenfalls, dass ein Kegel mit Grundfläche von Radius $R > 0$ und Höhe H das Volumen $\frac{R^2 H \pi}{3}$ hat.

Lösung: Das Volumen von E ist $\frac{(h_2^3 - h_1^3)\pi}{3}$ als Differenz der Volumen der zwei Kegel mit jeweils $R = H = h_2$ und $R = H = h_1$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \int_E z\, dx\, dy\, dz &= \frac{3}{(h_2^3 - h_1^3)\pi} \int_{h_1}^{h_2} \int_0^z \int_0^{2\pi} zr\, d\phi\, dr\, dz \\ &= \frac{6\pi}{(h_2^3 - h_1^3)\pi} \int_{h_1}^{h_2} \frac{z^3}{2}\, dz \\ &= \frac{3(h_2^4 - h_1^4)}{4(h_2^3 - h_1^3)} \end{aligned}$$

Punkteverteilung:

8 Punkte

2P Volumen E

1P Zylinderkoordinaten

4P Rechnung

1P Resultat

Frage 12. Es seien $H \subseteq \mathbb{R}^3$ das Hyperboloid, und $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ebene gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 + 2xz - 2yz = 2z^2 - 20\} \\ E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $E \cap H = \emptyset$ gilt.

(b) Finden Sie die Punkte in H, welche am nächsten zur Ebene E sind.

Lösung:

(a) Der Schnitt ist beschrieben durch die Gleichung $x^2 + 3y^2 = -20$. Diese Gleichung besitzt keine Lösungen.

(b) Wir wollen die Punkte auf H finden, bei welchem der Normalenvektor parallel zur z-Achse ist. Die Fläche H ist die Nullstellenmenge der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + 3xy + 2xz + 3y^2 - 2yz - 2z^2 + 20$. Wir finden den Normalenvektor an einem Punkt $(x,y,z) \in H$ durch den Gradienten

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + 2z \\ 6y - 2z \\ 2x - 2y - 4z \end{pmatrix}.$$

Parallel zur z-Achse heisst $2x + 2z = 0$ und $6y - 2z = 0$. Daraus folgt $x = -z$ und $y = \frac{1}{3}z$. Setzen wir das in die Gleichung für H ein, erhalten wir

$$0 = z^2 + \frac{1}{3}z^2 - 2z^2 - \frac{2}{3}z^2 - 2z^2 + 20 = -\frac{10}{3}z^2 + 20.$$

Also $z = \pm\sqrt{6}$. Wir finden die 2 Punkte $(-\sqrt{6}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{6})$ und $(\sqrt{6}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{6})$.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

(b) 6 Punkte. Zwei Möglichkeiten A, B (mit / ohne Lagrange Multiplikatoren)

max 3P A: falsche Lagrange- Funktion

2P A: Lagrange-Funktion

1P B: Idee Gradient

1P B: Gradient

2P A/B: Gleichungen

2P A/B: Lösungen

Frage 13. Sei $f : (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = \frac{x}{(2-x)(1-3x)}$. Finden Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 der Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Nur die Antwort zählt.

Lösung: Wir benutzen zwei Mal die geometrische Reihe

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + O(x^3)\right)$$

und

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + O(x^3).$$

Darum folgt

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{(2-x)(1-3x)} &= x\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + O(x^3)\right)(1 + 3x + 9x^2 + O(x^3)) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{8} + \frac{9x^3}{2} + \frac{3x^3}{4} + O(x^4) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{7x^2}{4} + \frac{43x^3}{8} \end{aligned}$$

Also ist $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{7}{4}$ und $a_3 = \frac{43}{8}$.

Punkteverteilung:

8 Punkte

je 2P pro Koeffizient, keine Teilpunkte

Frage 14. Seien $a, b, c > 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass jede reellwertige Lösung der Differentialgleichung $ay'' + by' + cy = 0$ die Eigenschaft

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

erfüllt.

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $a = 1$, da wir die DGL durch a dividieren können, die Lösungen und die Eigenschaften aber gleich bleiben. Das charakteristische Polynom ist $P(T) = T^2 + bT + c$ und hat Nullstellen

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

- Falls $b^2 - 4c > 0$ ist, dann ist $\sqrt{b^2 - 4c}$ reell, aber $x_\pm = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2} < 0$. Lösungen sind von der Form $y(t) = Ae^{x_+t} + Be^{x_-t}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$. Weil $x_\pm < 0$ ist folgt $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.
- Falls $b^2 - 4c = 0$ ist, dann ist $x_- = x_+ = -\frac{b}{2}$ und Lösungen die Form $y(t) = Ae^{-\frac{b}{2}t} + Bte^{-\frac{b}{2}t}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$. Weil $b > 0$ ist, folgt $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.
- Falls $D = 4c - b^2 > 0$ ist, haben Lösungen die Form $y(t) = e^{-\frac{b}{2}}(A\cos(\sqrt{D}) + B\sin(\sqrt{D})$ mit $A, B \in \mathbb{R}$. Weil $b > 0$ ist, folgt wieder $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Punkteverteilung:

8 Punkte

2P allgemeine Lösung

je 2P pro Fall

Frage 15.

(a) Definieren Sie *Ordnungsrelation* und *geordnete Menge*.

(b) Was besagt das Zorn'sche Lemma?

Lösung:

(a) Eine Relation auf einer Menge X ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Schreiben wir $x \leq y$ für $(x, y) \in \mathcal{R}$, dann können wir die Axiome einer Ordnungsrelation folgendermassen schreiben. Für alle $x, y, z \in X$ haben wir

- Reflexivität: Es gilt $x \leq x$.
- Transitivität: Falls $x \leq y$ und $y \leq z$ dann ist auch $x \leq z$.
- Antisymmetrie: Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

$(X, \leq)$ heisst dann geordnete Menge.

(b) Sei $(X, \leq)$ eine nichtleere induktiv geordnete Menge. (Induktiv heisst, dass jede total geordnete Menge eine obere Schranke besitzt). Dann existiert ein maximales Element in X.

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte

1P Reflexivität

1P Transitivität

1P Antisymmetrie

1P geordnete Menge

max 3P nur die Eigenschaften (ohne Definition) gelistet sind

max 2P kleine Ungenauigkeiten (nicht in Form einer Definition, Relation falsch definiert, etc)

(b) 4 Punkte

2P Annahmen (1 für *induktiv*)

2P Folgerung

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge, und sei $f_A : X \to \mathbb{R}$ die durch

$$f_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

definierte Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_A stetig ist. Ist f_A sogar gleichmässig stetig? Falls ja, dann beweisen Sie das, und falls nicht, erklären Sie warum.

(b) Wie ist der *Abschluss* von A in X definiert?

(c) Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge von f_A genau der Abschluss von A ist.

(d) Sei $B \subseteq X$ eine weitere Teilmenge. Analog zu f_A wird f_B definiert. Folgt aus $f_A = f_B$ auch $A = B$?

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass f_A Lipschitz stetig mit Lipschitz Konstante 1 ist, also

$$|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y).$$

Seien $x, y \in X$, dann gilt für beliebiges $a \in A$, dass $f_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ mit der Dreiecksungleichung.

Da a beliebig war, folgt aus $f_A(x) \leq d(x, y) + d(y, a)$, wenn wir dass Infimum über alle $a \in A$ nehmen, dass $f_A(x) \leq d(x, y) + f_A(y)$ gilt. Also

$$f_A(x) - f_A(y) \leq d(x, y).$$

Indem wir x, y vertauschen, finden wir analog

$$f_A(y) - f_A(x) \leq d(y, x) = d(x, y).$$

Zusammen folgt

$$|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y).$$

(b) Der Abschluss $\overline{A}$ von A ist definiert als

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{ für jede offene Menge } U, \text{ welche } x \text{ enthält, gilt } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

(c) Wir müssen folgende Aussage zeigen: Für alle $x \in X$ gilt $f_A(x) = 0$ genau dann wenn für alle offenen Mengen U, welche x enthalten, $U \cap A \neq \emptyset$ gilt.

$\underline{\Rightarrow:}$ Sei $x \in X$ mit $f_A(x) = 0$. Sei weiter U eine beliebige offene Menge, welche x enthält. Per Definition von Offenheit, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x, \epsilon) \subseteq U$ ist. Weil $0 = f_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ ist, gibt es ein $a \in A$ mit $d(x, a) < \epsilon$. Das heisst ausserdem, dass a in $B(x, \epsilon) \subseteq U$ liegt, also in $U \cap A$. Darum ist $U \cap A \neq \emptyset$.

$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $x \in X$. Wir nehmen an, dass für alle offenen Mengen U, welche x enthalten, $U \cap A \neq \emptyset$ gilt. Im Besonderen, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Menge $B(x, \frac{1}{n})$ offen und enthält x. Per Annahme gibt es ein $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Darum ist $a_n \in A$ und $d(x, a) < \frac{1}{n}$für jedes $n \in \mathbb{N}$. Weil die Funktion f_A als $f_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ definiert ist, folgt $f_A(x) \leq \frac{1}{n}$ für alle $\mathbb{N}$. Weil $f_A \geq 0$ ist, folgt darum $f_A(x) = 0$.

(d) Nein. Nur $\overline{A} = \overline{B}$. Zum Beispiel in $X = \mathbb{R}$ gilt $f_{(0,1)} = f_{[0,1]}$, aber $(0, 1) \neq [0, 1]$.

Punkteverteilung:

(a) 11 Punkte

2P Geichmässig stetig mit Begründung

2P Idee (sinvolle Anwendung der Dreiecksungleichung)

(b) 3 Punkte

(c) 12 Punkte

6P $\Rightarrow$

6P $\Leftarrow$

max 4P Beweis durch Häufungspunkt ohne Definition

(d) 4 Punkte

0P Nur Nein

max 2P Nur $\overline{A} = \overline{B}$

4P Gegenbeispiel

Aufgabe 2.

(a) Was ist eine Lebesgue Nullmenge? Geben Sie die Definition.

(b) Kann eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue Nullmenge sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Sind beschränkte Lebesgue Nullmengen abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie: Jede abzählbare Vereinigung von Lebesgue Nullmengen ist eine Lebesgue Nullmenge.

(e) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph von f, aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, eine Lebesgue Nullmenge ist.

Lösung:

(a) Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ wird eine Lebesgue-Nullmenge genannt, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine abzählbare Familie von offenen Quadern $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$N \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k \qquad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_k) < \epsilon$$

gilt.

(b) Eine nichtleere offene Teilmenge kann keine Nullmenge sein: Eine nichtleere offene Menge enthält per Definition einen Ball $B(x,r)$. Ein Ball $B(x,r)$ enthält einen abgeschlossenen Quader $Q = (x_1 - r_n, x_1 + r_n) \times \cdots \times (x_n - r_n, x_n + r_n)$, wobei $r_n = \sqrt[n]{\frac{r}{2}}$ ist. Dann gilt in der Tat für jedes $y \in Q$, dass $|y - x| \leq r_n^n = \frac{r}{2} < r$. Ein solcher Quader Q ist aber keine Lebesgue Nullmenge.

(c) Nein, $N = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht abgeschlossen, aber eine Nullmenge.

(d) Seien $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ und sei N ihre Vereinigung. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert per Definition von Nullmengen für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Familie offener Quader $(Q_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$N_j \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_{jk} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_{jk}) < \frac{\epsilon}{2^{j+1}}.$$

Dies impliziert aber

$$N = \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_{jk} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_{jk}) < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{j+1}} = \epsilon.$$

Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist und $\epsilon > 0$ beliebig war zeigt dies, dass N eine Nullmenge ist.

(e) Sei $\epsilon > 0$. Da f Riemann-integrierbar ist, existieren für jedes $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen u und o auf Q mit $u < f < o$ und $\int_0^1 (o-u)dx < \epsilon$. Wir wählen eine Zerlegung $0 = x_0 < \ldots < x_n = 1$ von $[0,1]$ so, dass beide Funktionen u und o konstant auf $I_i := (x_{i-1}, x_i)$ sind. Sei c_i der konstante Wert von u, und d_i der konstante Wert von o auf I_i. Definiere den Quader $Q_i = I_i \times (c_i, d_i)$ und erhalten

$$\operatorname{graph}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Q_i \cup \bigcup_{i=0}^{n} \Big(\{x_i\} \times \mathbb{R}\Big).$$

Die zweite Vereinigung ist eine Nullmenge, da man sie durch abzählbar viele Nullmengen der Form $\{x_i\} \times (m, m+2)$ mit $m \in \mathbb{Z}$ überdecken kann.

Weiter gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{vol}(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)\operatorname{vol}(I_i) = \int_0^1 (o-u)dx < \epsilon,$$

was zeigt, dass $\operatorname{graph}(f)$ von abzählbar vielen Quadern mit Summe der Volumina kleiner als ϵ überdeckt werden kann. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Aussage.

Punkteverteilung:

(a) 3 Punkte

1P abzählbare Vereinigung

1P Überdeckung mit offenen Quadern

1P Struktur der Definition (z.B. $\forall \varepsilon > 0$ am richtigen Ort)

(b) 6 Punkte

3P U enthält ein Ball mit Radius $\rho > 0$

3P Monotonie der Lebesgue Mass

max 1P Nur Proposition aus der Vorlesung

(c) 3 Punkte

(d) 8 Punkte

3P Idee (1P: abzählbare Vereinigung von abzählbare Mengen ist abzählbar)

2P Benutzung der Definition von Nullmenge

3P Umgehen mit Reihen

(e) 10 Punkte

4P Konstruktion der Überdeckung

2P Behandlung der Zwischenpunkten

4P Konvergenz der Summe der Volumen

Aufgabe 3. Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion, und es sei F das Vektorfeld auf $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0)\}$ definiert durch

$$F(x, y, z) = \left((1 + x)e^{x+\frac{1}{y}}, \quad -\tfrac{x}{y^2}e^{x+\frac{1}{y}}, \quad g'(z)\right)$$

(a) Ist die Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen? Ist Sie zusammenhängend? Ist Sie einfach zusammenhängend?

(b) Erfüllt das Vektorfeld F die Integrabilitätsbedingungen?

(c) Ist F konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Besitzt das Vektorfeld F ein Potential? Falls Ja, geben Sie eines an. Falls Nein, erklären Sie warum nicht.

(e) Wie sind *Arbeitsintegrale* allgemein definiert?

(f) Es sei $\gamma : [0, 1] \to U$ der Pfad gegeben durch

$$\gamma(t) = (t \cos(2\pi t), \quad 2 + t \sin(2\pi t), \quad t^2 - t + 1).$$

Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_\gamma F dt.$$

Lösung:

(a) Die Menge U ist offen als Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, welche (x, y, z) auf y sendet. Ausserdem besteht U aus zwei einfach zusammenhängenden Komponenten.

(b) Wir sehen direkt $\partial_z F_1 = 0 = \partial_x F_3$ sowie $\partial_z F_2 = 0 = \partial_y F_3$. Ausserdem ist

$$\partial_x F_2 = -\left(\frac{1 + x}{y^2}\right) e^{x+\frac{1}{y}} = \partial_y F_1$$

(c) Ja, da U einfach zusammenhängende Komponenten hat und die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, wie in (b) gezeigt. Alternativ, folgt auch aus (d).

(d) Ein Potential ist $f(x, y, z) = h(x, y) + g(z)$ mit $h(x, y) = xe^{x+\frac{1}{y}}$ - findet man mit $\partial_x f = F_1$.

(e) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Das Arbeitsintegral von F entlang eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to U$ ist definiert durch

$$\int_\gamma F dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

(f) Wir nutzen das Potential:

$$\int_\gamma F \, dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = h(1, 2) + g(1) - h(0, 2) - g(1) = e^{\frac{3}{2}}.$$

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte (muss nicht begründet werden)

1P offen

2P nicht zusammenhängend

1P *Menge als ganzes nicht* oder *Komponenten sind einfach zusammenhängend*

(b) 6 Punkte

3P Nur x, y-Komponenten betrachtet

(c) 3 Punkte (drei Möglichkeiten A,B,C,D)

2P A: konservativ, da Rotation 0 ist

1P A: Bedingung U einfach zusammenhängende Komponenten.

3P B: F besitzt Potential

2P C: F nicht konservativ, da U nicht einfach zusammenhängend

2P D: Folgefehler Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt, deswegen nicht konservativ.

(d) 8 Punkte

max 2P Ja mit Begründung, ohne Rechnung

8P Potential berechnet

(e) 3 Punkte

2P für Definition mit kleinen Fehlern (z.B. stetig diffbar vergessen)

(f) 6 Punkte

3P Idee Potential nutzen

Aufgabe 4. Es seien R, a, b nichtnegative reelle Zahlen. Wir definieren eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ durch

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\} \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by.$$

(a) Erklären Sie, warum die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ ihr Maximum auf B annimmt. Zitieren Sie die Sätze, die Sie benutzen, vollständig.

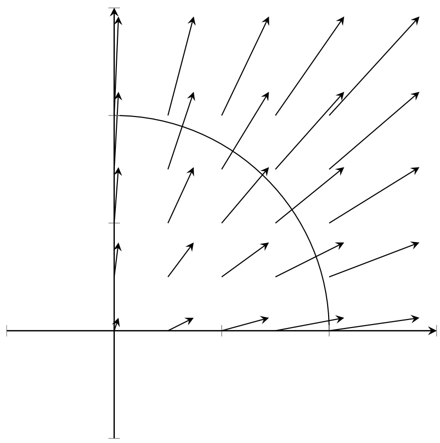
(b) Skizzieren Sie die Menge B und den Gradienten der Funktion f.

(c) Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f : B \to \mathbb{R}$, und geben Sie alle Punkte $(x, y) \in B$ an, an denen dieses Maximum angenommen wird.

Lösung:

(a) Die Menge B ist kompakt, da abgeschlossen und beschränkt, die Funktion f ist stetig. Aus der Vorlesung wissen wir, dass f dann sein Maximum und sein Minimum auf B annimmt.

(b) Die Menge B ist ein Viertel eines Kreises (im ersten Quadrant). Der Gradient von f ist $\begin{pmatrix} 2x + a \\ 2y + b \end{pmatrix}$.



(c) Wir teilen B in verschiedene disjunkte Mengen auf:

$$\begin{aligned}
U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < R^2\}, \\
L_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x = 0, R > y > 0\}, \\
L_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ R > x > 0, y = 0\}, \\
L_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = R^2\}, \\
P_0 &= (0, 0) \qquad P_1 = (0, R), \qquad P_2 = (R, 0)
\end{aligned}$$

und berechnen separat die Extrema.
<u>U:</u> Der Gradient von f verschwindet genau dann wenn $a = -2x$ und $b = -2y$. Da aber $x, y > 0$ und $a, b \geq 0$ ist, ist dies nie der Fall. Darum keine Extrema in U.

<u>L_1:</u> Auf L_1 maximieren wir die Funktion $f_1(y) = y^2 + by$, da $x = 0$ ist. Doch $f_1'(y) = 2y + b$ ist nie gleich 0 aus demselben Argument wie für U.

<u>L_2:</u> Auf L_2 gibt es auch keine Extrema, da das Argument symmetrisch zu L_1 ist, wenn wir x, y und a, b jeweils vertauschen.

<u>L_3:</u> Für L_3 bilden wir die Lagrangefunktion

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + ax + by - \lambda(x^2 + y^2 - R^2)$$

Wir berechnen die Ableitungen und setzen sie 0:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_x L(x, y, \lambda) = 2x + a - 2\lambda x \\
0 &= \partial_y L(x, y, \lambda) = 2y + b - 2\lambda y \\
0 &= \partial_\lambda L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - R^2
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit y und die zweite mit x, können wir durch Subtraktion λ eliminieren und erhalten eine Gleichung $ay = bx$. Wir unterscheiden:

- Aus $a = 0$ folgt $b = 0$ und umgekehrt (da $x, y > 0$ ist) und dann ist die Zielfunktion $f(x, y) = x^2 + y^2 = R^2$ konstant auf dem Viertelsegment.
- Falls nur eine Zahl aus a oder b gleich 0 ist, haben wir keine Lösungen auf L_3.
- Aus $a > 0$ folgt $y = \frac{bx}{a}$ und mit der letzten Gleichung folgt $x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} = R^2$, also

  $$x^2 = \frac{a^2R^2}{a^2 + b^2}.$$

  Weil $x > 0$ ist, folgt

  $$x = \frac{aR}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

  Ausserdem ist

  $$y = \frac{bR}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

  Wir haben den Wert $f(x, y) = R^2 + R\sqrt{a^2 + b^2}$

<u>P_1, P_2, P_3:</u> Wir setzen ein:

$$f(P_0) = 0, \qquad f(P_1) = R^2 + bR \qquad f(P_2) = R^2 + aR$$

<u>Schlussfolgerung:</u>

- Falls $a = b = 0$ ist, dann nimmt f das Maximum R^2 auf $L_3 \cup P_1 \cup P_2$ an.
- Falls $a = 0$ und $b > 0$ ist, dann nimmt f das Maximum $R^2 + bR$ bei P_1 an.
- Falls $a > 0$ und $b = 0$ ist, dann nimmt f das Maximum $R^2 + aR$ bei P_2 an.
- Falls $a, b > 0$ ist, dann nimmt f das Maximum $R^2 + R\sqrt{a^2 + b^2}$ bei $\left(\frac{aR}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bR}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ an.

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte

2P B kompakt

1P f stetig

1P Folgerung durch Satz

(b) 4 Punkte

2P Skizze B

1P Gradient berechnet

1P Skizze Gradient, muss von x und y abhängen (keine parallelen Vektoren)

(c) 22 Punkte

3P Eckpunkte und deren Funktionswerte

2P keine Extrema auf x-Achse

2P keine Extrema auf y-Achse

4P keine Extrema im Innern

- **2P** Gradient
- **2P** lokale Extrema

7P Extrema Viertelkreis

- **2P** Lagrange-Funktion
- **2P** Gleichungen
- **2P** Lösungen
- **1P** Funktionswert

4P Schlussfolgerung mit Fallunterscheidung

Aufgabe 5. Der *Integralsinus* ist die durch

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

definierte Funktion $\mathrm{Si} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Erklären Sie, warum das Integral konvergiert.

(b) Geben Sie die Taylor-Reihe von $\mathrm{Si}(x)$ an (im Punkt $x_0 = 0$).

(c) In einer Formelsammlung finden Sie $\lim_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2}$, und auf einer dubiosen Internetseite finden Sie folgenden "Beweis" dazu:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(t)\exp(-ts)\,ds\,dt = \int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2}$$

Geben Sie Details zu den Rechenschritten an, und begründen Sie warum die Rechnung funktioniert, oder warum sie nicht funktioniert. Geben Sie dabei präzise an, welche Resultate aus der Vorlesung Sie benutzen.

Lösung:

(a) Die Funktion $f : (0, x] \to \mathbb{R}$ definiert durch $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ ist, darum kann f stetig zu einer Funktion $\tilde{f} : [0, x] \to \mathbb{R}$ erweitert werden. Stetige Funktion definiert auf einem kompakten Intervall sind integrierbar. Das Integral konvergiert also.

(b) Wir benutzen die Reihendarstellung des Sinus. Die Potenzreihe des Sinus konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und ist $\sin(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Wir dürfen Potenzreihen gliedweise integrieren und erhalten darum

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

(c)
- Aus

$$\int_0^y \exp(-ts)\,ds = \frac{-\exp(-ty)}{t} + \frac{1}{t}.$$

für $t > 0$ folgt

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^x \int_0^y \sin(t)\exp(-ty)\,ds\,dt + \int_0^x \frac{\sin(t)\exp(-ty)}{t}\,dt.$$

- Wir können Fubini für das Doppelintegral in (1) benutzen und zuerst nach t integrieren. Zwei Mal mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^x \exp(-ts)\,\sin(t)\,dt &= 1-\exp(-xs)\,\cos(x) - s\int_0^x \exp(-ts)\,\cos(t)\,dt \\ &= 1-\exp(-xs)\Big(\cos(x)+s\sin(x)\Big) - s^2\int_0^x \exp(-ts)\sin(t)\,dt\end{aligned}$$

Also

$$\int_0^x \exp(-ts)\,\sin(t)\,dt = \frac{1-\exp(-xs)\Big(\cos(x)+s\sin(x)\Big)}{1+s^2}$$

und darum eingesetzt in (1) folgt

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^y \frac{1}{1+s^2}\,ds - \int_0^y \frac{\exp(-xs)\Big(\cos(x)+s\sin(x)\Big)}{1+s^2}\,ds + \int_0^x \frac{\sin(t)\exp(-ty)}{t}\,dt.$$

für alle $x, y > 0$.

Das zweite Integral verschwindet für $x \to \infty$ für jedes y, da der Integrand im Betrag kleiner als $\frac{\exp(-xs)(1+s)}{1+s^2} \leq 2\exp(-sx)$ ist, welches Integral 0 hat für $x \to \infty$.

Das dritte Integral konvergiert absolut für $x \to \infty$. Darum können wir zuerst den Grenzwert des Integrals für $y \to \infty$ berechnen, welches 0 ist.

Wir folgern mit $y \to \infty$, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2}\,ds$$

ist.

- Wie in der Vorlesung berechnet, schliessen wir

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2}\,ds = \lim_{y\to\infty}(\arctan(y) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte. Möglichkeiten A,B

4P A: Funktion kann auf $x = 0$ fortgesetzt werden

1P A: Stetige Funktion auf einem Kompakten Intervall sind integrierbar

2P B: Idee Leibnizkriterium

1P B: alternierend

(b) 10 Punkte

1P Definition der Taylor Reihe um 0

max 6P Nur erste Terme

2P Potenzreihe des Sinus

(c) 15 Punkte

je 5P pro Rechnung (die Abschätzungen für den zweiten Punkt sowie das Argument der Vertauschung der Grenzwerte muss nicht rigoros aufgeschrieben sein.)

1P *Fubini*