Frage 1.

(a) Wie ist das Supremum $\sup A$ einer nichtleeren beschränkten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ definiert?

(b) Beweisen Sie, dass $\sup\{\sin(x) \mid x \in \mathbb{Q}\} = 1$.

Lösung:

(a) Das Supremum $s = \sup A$ ist die eindeutige Zahl, so dass

- $x \leq s$ für alle $x \in A$ (s ist eine obere Schranke),
- falls $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ so ist, dass $x \leq \tilde{s}$ für alle $x \in A$, dann ist $s \leq \tilde{s}$ (s ist kleiner als alle anderen oberen Schranken).

(b) Wir wissen, dass $\sin(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (und somit $x \in \mathbb{Q}$) ist. Ausserdem gilt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Wähle eine Folge $x_n \in \mathbb{Q}$, so dass $x_n \to \frac{\pi}{2}$ (zum Beispiel $x_n = \frac{\pi}{2}$ auf n Nachkommastellen gerundet). Weil $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein n, so dass $\sin(x_n) > \sin(\frac{\pi}{2}) - \epsilon = 1 - \epsilon$. Darum ist $\sup\{\sin(x) \mid x \in \mathbb{Q}\} = 1$.

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte

2P (A1) obere Schranke

2P (B1, B2) kleinste obere Schranke

max 3P keine explizite mathematische Definition

(b) 4 Punkte *Official solution:*

1P (C1, C2) $\sin(x) \leq 1$ oder $|\sin(x)| \leq 1$

1P (D1) $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \sin(x_0) = 1$

1P (E1) sin stetig

1P (F1) Schlussfolgerung durch Folge $x_n \to x_0$ und Stetigkeit von sin

1P (F2, F3) Schlussfolgerung durch $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht und Stetigkeit von sin

1P (F4) Schlussfolgerung durch sin ist strikt monoton auf $[0, \pi/2]$ und stetig

Frage 2. Wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ gilt.

(a) Was erhalten wir, wenn wir nur über die geraden natürlichen Zahlen n summieren?

(b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

(c) Berechnen Sie das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\, dx.$$

Lösung:

(a) Die Summe von $1/n^2$ über gerade n ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

(b) Die Summe ist genau die Summe von $1/n^2$ über alle ungeraden n, also die Summe über alls n minus die Summe über die geraden n:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(c) Aus $\log(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ folgt

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\, dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\, dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n}\, dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

je 1P für **(A1)** Summe als Formel, **(B1)** korrekter Wert

(b) 3 Punkte

je 1P für **(C1)** Summe über ungerade Zahlen, **(D1)** totale Summe minus Summe über gerade Zahlen, **(E1)** korrekter Wert

(c) 3 Punkte

je 1P für **(F1)** Reihenentwicklung von $\log(1-x)$, **(G1)** Summe und Integral vertauschen, **(H1)** korrekter Wert

Frage 3. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0, \dots, a_7$ des Taylorpolynoms von arccos um $x = 0$

$$\arccos(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_7 x^7 + O(x^8).$$

Lösung: Die Funktion $\arccos : (-1,1) \to \mathbb{R}$ hat Ableitung $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Mit der Binomialreihe

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k,$$

für $-t^2 = x$ und $\alpha = -\frac{1}{2}$ erhalten wir

$$-(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-t^2)^k.$$

Mit dem Fundamentalsatz und dem Vertauschen von Integral und Reihe für Potenzreihen:

$$\begin{aligned}
\arccos(y) &= \arccos(0) + \int_0^y -(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^y \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-t^2)^k \right) dt \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \int_0^y t^{2k}\, dt \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{y^{2k+1}}{2k+1} \\
&= \frac{\pi}{2} - y + \frac{-\frac{1}{2}}{1} \frac{y^3}{3} - \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \frac{y^5}{5} + \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{y^7}{7} + O(y^9) \\
&= \frac{\pi}{2} - y - \frac{y^3}{6} - \frac{3y^5}{40} - \frac{5y^7}{112} + O(y^9).
\end{aligned}$$

Also

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{3}{40}, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = -\frac{5}{112}.$$

Punkteverteilung:
8 Punkte: **je 1P** pro korrektem Koeffizienten

-1P für vergessen des Binominalkoeffizienten für Koeffizienten (einmaliger Abzug)

-1P pro Fehler (z.B Rechenfehler in Reihe, Ableitung)

-1P falls Vertauschung von Integral und Reihe nicht begründet ist

Spezialpunkte falls Studierende:r $\leq$ 2P für $a_2 - a_7$ hat.:

1P (B1) für Binominalreihe mit korr. Koeffizuienten

1P (F1) für Fundamentalsatz

1P (V1) für (Begründung von) Vertauschen von Summe und Integral

Frage 4. Wir wissen, dass ein metrischer Raum (X, d) *vollständig* heisst, falls alle Cauchy-Folgen in X konvergent sind.

(a) Wie sind Cauchy-Folgen in einem metrischen Raum definiert?

(b) Ist $X = \mathbb{Z}$ mit Metrik $d\colon (n, m) \mapsto |n - m|$ vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Beweisen Sie, dass kompakte metrische Räume vollständig sind.

Hinweis: Am besten verwenden Sie, dass für metrische Räume Kompaktheit und Folgen-Kompaktheit äquivalent sind.

Lösung:

(a) Eine Folge $(x_n)_n$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Cauchy-Folge, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_m - x_n) < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt.

(b) Ja, $\mathbb{Z}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $\mathbb{R}$ und d ist die induzierte Merik von $\mathbb{R}$.

Alternativ (der direkte Beweis): Sei (x_k) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Z}$. Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{2}$ für alle $m, n \geq N$. Für $m = N$ folgt $|x_n - x_N| \leq \frac{1}{2}$ und weil x_n, x_N beide in $\mathbb{Z}$ sind, muss darum $x_n = x_N$ für alle $n \geq N$ gelten. Also ist (x_n) schliesslich konstant und konvergiert darum auch.

(c) Die Charakterisierung von Kompaktheit durch Folgen-Kompaktheit besagt, dass alle Folgen in einem kompakten metrischen Raum eine konvergente Teilfolge besitzen.

Sei also (X, d) ein kompakter metrischer Raum und (x_n) eine Cauchy-Folge in X. Da X kompakt ist, besitzt (x_n) eine Teilfolge (x_{n_k}), welche konvergiert. Bezeichne den Grenzwert als $x \in X$. Doch dann konvergiert auch die ursprüngliche Folge (x_n) gegen x: Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_{n_k}, x) \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq N_1$. Weil (x_n) Cauchy ist, gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $m, n \geq N_2$. $N = \max\{N_1, N_2\}$. Wähle ein beliebiges $K \in \mathbb{N}$, so dass $n_K \geq N$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, x_n) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

(b) 2 Punkte

(c) 4 Punkte

je 1P für **(A1)** Folgenkompaktheit, **(B1)** beliebige Cauchy-Folge hat Teilfolge mit Grenzwert in X

2P (C2) Beweis: Cauchy-Folge mit konvergenter Teilfolge ist auch konvergent

max 1P (N1) falls nur "kompakt $\implies$ abgeschlossen (und beschränkt)"

Frage 5. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\varphi(x) = (x_1^3 - x_2, x_2 + x_1)$, wobei $x = (x_1, x_2)$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung $D_x\varphi$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \varphi(\mathbb{R}^2)$ ein Diffeomorphismus ist.

(c) Was ist der Flächeninhalt des Bildes $\varphi(Q)$ des Quadrats $Q = [0,1] \times [0,1]$ unter φ?

Lösung:

(a) Die Jacobi-Matrix ist

$$D_x\varphi = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Weil $\det(D_x\varphi) = 3x_1^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist (also Determinante überall nicht verschwindend), ist $D_x\varphi$ invertierbar. Darum ist $D_x\varphi$ ein lokaler Diffeomorphismus.

Um zu zeigen, dass φ ein Diffeomorphismus ist, müssen wir noch zeigen, dass φ injektiv ist. Nehmen wir also an, dass $x, y \in \mathbb{R}^2$ sind mit

$$\varphi(x) = (x_1^3 - x_2, x_2 + x_1) = (y_1^3 - y_2, y_2 + y_1) = \varphi(y).$$

Aus $x_2 = y_2 + y_1 - x_1 = x_1^3 - y_1^3 + y_2$ folgt $y_1 - x_1 = x_1^3 - y_1^3$ und darum

$$0 = x_1^3 - y_1^3 + (x_1 - y_1) = (x_1 - y_1)(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 + 1).$$

Da $(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 + 1) = \left(x_1 + \frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{3y_1^2}{4} + 1 > 0$ muss $x_1 = y_1$ sein. Damit folgt auch $x_2 = y_2$, also $x = y$ und darum φ injektiv.

(c) Wir benutzen den Transformationssatz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\varphi(Q)) &= \int_{\varphi(Q)} 1 \,\mathrm{dvol}(y) = \int_Q |\det(D_x\varphi)| \mathrm{dvol}(x) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (3x_1^2 + 1)\, dx_1 dx_2 = \int_0^1 (3x_1^2 + 1)\, dx_1 \\
&= \left[x_1^3 + x_1\right]_0^1 = 2.
\end{aligned}$$

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte (nur 1P falls Lösung transponiert ist)

(b) 3 Punkte

1P $D_x\varphi$ ist invertierbar ($\mathrm{Det}(D_x\varphi) > 0$)

2P φ ist injektiv

(c) 3 Punkte

2P Formel für die Fläche

1P Richtig integrieren

Frage 6. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Anfangswertprobleme.

(a) $y''(x) = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

(b) $y'(x) = y(x) + x$, $y(0) = 0$.

(c) $y'(x) = x^2 y(x)^2$, $y(0) = 1$.

(d) $y''(x) = y'(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Nur die Antwort zählt.

Lösung:

(a) Mit $y'(x) = y'(1) + \int_1^x y''(t)dt = 1 + x - 1 = x$ folgt

$$y(x) = y(1) + \int_1^x y'(t)dt = 1 + \int_1^x t\,dt = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2+1}{2},$$

welches für $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

(b) Weil $y' = y$ Lösung $x \mapsto Ce^x$ hat, benutzen wir den Ansatz $y(x) = C(x)e^x$. Es folgt $C'(x)e^x = x$, also $C'(x) = xe^{-x}$ und darum $C(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C$. Aus $y(x) = -x - 1 + Ce^x$ folgt $C = 1$ mit $y(0) = 0$. Die Lösung

$$y(x) = -x - 1 + e^x$$

ist definiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Mit Separation der Variabeln folgt $y'/y^2 = x^2$ und darum $-\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + C$. Nach y aufgelöst: $y(x) = -\frac{3}{x^3+3C}$. Mit $y(0) = 1$ folgt $C = -1$. Die Lösung

$$y(x) = -\frac{3}{x^3 - 3}$$

ist definiert für $x \in (-\infty, \sqrt[3]{3})$.

(d) Aus $y'' = y'$ und $y'(0) = 1$ folgt $y' = e^x$. Also ist

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t)\,dt = e^x - 1,$$

welches für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Punkteverteilung:

je 2 Punkte, nur das Resultat zählt

Frage 7. Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie eine Basis des Tangentenraumes T_pM in $p = (-1, 2, 3) \in M$ an.

Lösung:

(a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 - 1$. Dann ist $M = F^{-1}(0)$. Die Ableitung von F ist

$$D_xF = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$$

und verschwindet, falls $x_2 = -x_3$ und $x_1 = -x_3$ und $x_1 = -x_2$. Dies kann nur passieren, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ist. Doch der Punkt $(0, 0, 0)$ ist nicht in M. Darum ist D_xF für alle $x \in M$ surjektiv und M nach dem Satz über den konstanten Rang eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(b) Der Tangentenraum ist gegeben durch

$$T_pM = \ker D_pF = \ker(5, 2, 1) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right\}.$$

(a) 4 Punkte

1P Definition von F oder Erwähnen des Satzes vom konstanten Rang

1P Ableitung von F

1P Beweis $D_xF = 0 \Leftrightarrow x = 0$

1P $0 \notin M$

(b) 4 Punkte

1P $T_pM = \ker(D_pF)$

1P Berechnung D_pF

2P Berechnung zweier Basisvektoren des Tangentenraumes

Frage 8. Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ die Teilmenge

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

(a) Ist P kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie das Volumen von P.

Lösung:

(a) Seien $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktionen definiert durch $F_1(x, y, z) = z$ und $F_2(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z$. Dann ist $P = F_1^{-1}([0, \infty)) \cap F_2^{-1}([0, \infty))$ der Schnitt zweier abgeschlossenen Mengen, da F_1, F_2 stetig sind und $[0, \infty)$ abgeschlossen ist.

Aus $z \leq 1 - x^2 - y^2$ folgt ausserdem $z \leq 1$, also $0 \leq z \leq 1$. Aus $0 \leq 1 - x^2 - y^2$ folgt auch, dass $0 \leq x, y \leq 1$ ist. Darum ist P beschränkt.

Mit Heine-Borel ist P kompakt, da abgeschlossen und beschränkt.

(b) Wir berechnen mit Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(P) &= \int_P 1 \,\mathrm{dvol}(x) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r^2} r \, dz d\varphi dr \\
&= 2\pi \int_0^1 (r - r^3) \, dr = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Punteverteilung:

(a) 4 Punkte

2P Kompakt $\Leftrightarrow$ abgeschlossen und beschränkt

1P Beweis von Beschränktheit (nur explizite Schranken werden akzeptiert)

1P Beweis von Abgeschlossenheit

(b) 4 Punkte

1P Volumen als Integral

1P Verwendung von Zylinderkoordinaten

2P Rechnung

Frage 9. Berechnen Sie.

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x^2}\, dx$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n}$

(c) $\int_A 1\, dxdy$, wobei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{\sin(2x^4)}$

Nur die Antwort zählt.

Lösung:

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right)\, dx = \frac{1}{4}\left[\log|x+2| - \log|x-2|\right]_{-1}^{1} = \frac{\log 3}{2}$.

(b) Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1},$$

wobei wir die geometrische Reihe auf e^{-x} angewendet haben. Die Gleichheit gilt also für alle x, so dass $e^{-x} < 1$. Leiten wir nach x ab, erhalten wir

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{e^x(e^x-1) - e^x e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2},$$

und

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-nx} = -\frac{e^x(e^x-1)^2 - 2e^x(e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4} = \frac{e^{2x}+e^x}{(e^x-1)^3}.$$

Also für $x = 1$ (da $e^{-1} < 1$ ist gilt die hergeleitete Formel)

$$f''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n} = \frac{e^2+e}{(e-1)^3}.$$

(c) Durch eine Rotation von A um den Mittelpunkt $(0,0)$ mit Winkel $\frac{\pi}{4}$ erhalten wir das Quadrat $A' = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \times [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, welches Fläche $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ hat. Da das gesuchte Integral die Fläche von A ist, und Rotationen Flächen erhalten, ist $\int_A 1\, dxdy = 2$.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{\sin(2x^4)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{x^4}\frac{2x^4}{\sin(2x^4)} = \frac{1}{2}$, da wir den Grenzwert $\frac{\sin(t)}{t}$ für $t \to 0$ kennen und er gleich 1 ist.

Punkteverteilung:

je 2 Punkte, nur das Resultat zählt

Frage 10. Sei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$ der Einheitsball mit Mittelpunkt 0 und Radius 1.

(a) Formulieren Sie den Divergenzsatz für den glatt berandeten Bereich $B_1(0)$.

(b) Zeigen Sie: Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld v auf $\mathbb{R}^3$ hängt

$$I_n = \int_{B_1(0)} \operatorname{div}\Big((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^n v(x)\Big)\, \mathrm{dvol}(x)$$

nicht von $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ab: $I_n = I_m$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Lösung:

(a) Der Divergenzsatz besagt, dass für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder v definiert auf $\mathbb{R}^3$

$$\int_{B_1(0)} \operatorname{div}(v)\, \mathrm{dvol(x)} = \int_{\partial B_1(0)} v \cdot dn$$

gilt.

(b) Mit dem Divergenzsatz folgt

$$I_m = \int_{\partial B_1(0)} \Big((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^m v(x)\Big) \cdot dn.$$

Doch weil wir über $x \in B_1(0)$ integrieren ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Also folgt

$$I_m = \int_{\partial B_1(0)} v(x) \cdot dn,$$

welches unabhängig von $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist.

Punteverteilung:

(a) 4 Punkte

2P Annahmen (nur differenzierbar keine Punkte)

2P Integralgleichung

(b) 4 Punkte

2P Anwenden des Divergenzsatzes

1P Idee $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ für alle $x \in \partial B_1(0)$

1P Unabhängigkeit von n

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(x) = \int_{x-1}^{x+1} \cos(\pi t^2)\, dt$. Sie brauchen das Integral *nicht* explizit zu berechnen.

(a) Ist f stetig differenzierbar? Ist sie beschränkt? Ist sie eine gerade Funktion? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ des vierten Taylor-Polynoms von f um 0:

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \cos(\pi t^2) dt + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + O(x^5).$$

(c) Finden Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Für die kritischen Punkte $x = 0$ und $x = 1$ entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima, Minima oder keines der beiden handelt.

Lösung:

(a)
- Nach dem Fundamentalsatz ist f stetig differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \cos\left(\pi(x+1)^2\right) - \cos\left(\pi(x-1)^2\right).$
- f ist beschränkt: $|f(x)| = \left|\int_{x-1}^{x+1} \cos(\pi t^2)\, dt\right| \leq \int_{x-1}^{x+1} \left|\cos(\pi t^2)\right|\, dt \leq \int_{x-1}^{x+1} 1\, dt = 2.$
- f ist gerade: $f(-x) = \int_{-x-1}^{-x+1} \cos(\pi t^2)\, dt = -\int_{x+1}^{x-1} \cos(\pi s^2)\, ds = \int_{x-1}^{x+1} \cos(\pi s^2)\, ds.$

(b) Da f gerade ist, sind $a_1 = a_3 = 0$. Die weiteren Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -2\pi(x+1)\sin\left(\pi(x+1)^2\right) + 2\pi(x-1)\sin\left(\pi(x-1)^2\right), \\
f'''(x) &= -4\pi^2(x+1)^2\cos\left(\pi(x+1)^2\right) - 2\pi\sin\left(\pi(x+1)^2\right) \\
&\qquad + 4\pi^2(x-1)^2\cos\left(\pi(x-1)^2\right) + 2\pi\sin\left(\pi(x-1)^2\right) \\
f''''(x) &= 8\pi^3(x+1)^3\sin\left(\pi(x+1)^2\right) - 12\pi^2(x+1)\cos\left(\pi(x+1)^2\right) \\
&\qquad - 8\pi^3(x-1)^3\sin\left(\pi(x-1)^2\right) + 12\pi^2(x-1)\cos\left(\pi(x-1)^2\right)
\end{aligned}$$

und darum

$$f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = 0, \qquad f''''(0) = 24\pi^2.$$

Die Taylorkoeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 von f bei $x = 0$ erhalten wir aus $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = 0, \qquad a_4 = \pi^2.$$

(c) Wir finden die kritischen Punkte von f durch $f'(x) = 0$, also

$$\cos\left(\pi x^2 + \pi - 2\pi x\right) - \cos\left(\pi x^2 + \pi 1 + 2\pi x\right) = 0$$

Mit der Formel $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ folgt

$$2\sin(\pi(x^2+1))\sin(2\pi x) = \cos\left(\pi x^2 + \pi - 2\pi x\right) - \cos\left(\pi x^2 + \pi + 2\pi x\right) = 0.$$

Entweder ist also $x^2 + 1 = n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ oder $2x = m$ für $m \in \mathbb{Z}$. Die kritischen Punkte von f sind

$$x_n^{\pm} = \pm\sqrt{n-1} \qquad \text{und} \qquad y_m = \frac{m}{2}$$

für beliebige $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(d) Da $f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f''''(0) = 24\pi^2 > 0$ ist, hat f bei $x = 0$ ein Minimum. Für $x = 1$ haben wir $f''(1) = 0$

$$f'''(1) = -16\pi^2,$$

Darum ist $x = 1$ ein Sattelpunkt von f, weder Maximum noch Minimum.

Punteverteilung:

(a) 6 Punkte

je 2P pro Eigenschaft und Begründung

(b) 8 Punkte

je 2P pro Koeffizient und Begründung

je 1P pro Ableitung, aber falschem Koeffizient

(c) 3 Punkte

1P Ableitung Null setzen

je 1P pro Familie von Lösungen

(d) 3 Punkte

1P Klassifizierung von 0

2P Klassifizierung von 1

Aufgabe 2. Eine Folge von Funktionen $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei durch folgende Rekursionsrelation definiert:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \\ f_{n+1}(x) &= \frac{1 - x f_n(x/2)}{2}, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen eine stetige Funktion auf $[-1,1]$ konvergiert.

(b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$.

(c) Zeigen Sie, dass es genau eine stetige Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = \frac{1 - x f(x/2)}{2}$$

für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

(d) Schreiben Sie diese Funktion f als Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass die Abbildung $T : C^0[-1,1] \to C^0[-1,1]$ gegeben durch $T(f)(x) = \frac{1-xf(x/2)}{2}$ eine Kontraktion ist:

$$|T(f)(x) - T(g(x))| = \left| \frac{1 - xf(x/2)}{2} - \frac{1 - xg(x/2)}{2} \right| = \frac{1}{2}|x||g(x/2) - f(x/2)| \leq \frac{1}{2}||g - f||_\infty.$$

Also ist

$$||T(f) - T(g)||_\infty \leq \frac{1}{2}||f - g||_\infty.$$

Mit dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, dass die Folge definiert durch $f_1 = 0$ und $f_{n+1} = T(f_n)$ in $(C^0[-1,1], ||\cdot||_\infty)$ konvergiert, da letzteres ein vollständiger metrischer Raum ist. Die Konvergenz der Folge (f_n) in der $||\cdot||_\infty$-Norm entspricht der gleichmässigen Konvergenz.

(b) Wir sehen, dass $f_n(0) = \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 2$ gilt. Darum ist auch $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \frac{1}{2}$.

(c) Der Banachsche Fixpunktsatz besagt, dass der Fixpunkt eindeutig ist, darum gibt es genau eine Funktion mit $T(f) = f$.

(d) Die Fixpunktgleichung liefert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 2f(x) = 1 - xf(x/2) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} x^{n+1} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} x^n.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Folge

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad a_n = -\frac{a_{n-1}}{2^n}.$$

Also

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2^n} = \frac{a_{n-2}}{2^n 2^{n-1}} = \cdots = \frac{(-1)^n a_0}{2^n 2^{n-1} \dots 2^1} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{n+(n-1)+\cdots+1}} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{\frac{(n+1)n}{2}}} = \frac{(-1)^n}{2^{\frac{(n+1)n}{2}+1}}.$$

Der Konverganzradius der Reihe ist

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n-1}|2^n}{|a_{n-1}|} = \infty.$$

Punkteverteilung:

(a) 8 Punkte
Beweis über den Banachschen Fixpunktsatz:

2P (A2) Definition T (nur **1P** wenn Definitions-/Zielraum nicht angegeben)

3P (B3) T ist eine Kontraktion

1P (C1) $C([-1,1])$ ist vollständig

2P (D2) Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes

Direkter Beweis über Cauchyfolgen:

3P (A'3) Abschätzung $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \|f_n - f_{n-1}\|_\infty/2$

1P (B'1) Abschätzung $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq 2^{-n}$

1P (C'1) (f_n) ist eine Cauchy-Folge ist

1P (D'1) $C([-1,1])$ ist vollständig

2P (E'2) Schlussfolgerung bezüglich Existenz des Grenzwertes

Abstrakter direkter Konvergenzbeweis:

3P (A"3) Beweis der Existenz einer stetigen Funktion f auf dem Intervall $[-1,1]$, so dass $f(x) = (1 - xf(x/2))/2$ für $x \in [-1,1]$ gilt

2P (B"2) Abschätzung $\|f_n - f\|_\infty \leq \|f_{n-1} - f\|_\infty/2$

1P (C"1) Abschätzung $\|f_n - f\|_\infty \leq C2^{-n}$

1P (D"1) Schlussfolgerung

Explizite Berechnung:

4P (A"'4) Ausdruck $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k 2^{1+k(k+1)/2} x^k$

1P (B"'1) Beweis, dass (f_n) Cauchy ist

1P (C"'1) $C([-1,1])$ ist vollständig

2P (D"'2) Schlussfolgerung

(b) 2 Punkte

(c) 3 Punkte
Beweis über Banachschen Fixpunktsatz:

3P (A3) Anwendung der Eindeutigkeitsaussage des Banachschen Fixpunktsatzes (keine Punkte falls Kontraktion nicht definiert ist)

Beweis von Hand:

2P (A'2) Beweis, dass $\|f - g\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty/2$ falls f und g die Fixpunktgleichung lösen

1P (B'1) Schlussfolgerung

(d) 7 Punkte

1P (A1) Gleichung mit Potenzreihen auf beiden Seiten

1P (B1) Anfangswert $a_0 = 1/2$

1P (C1) Rekursion $a_{n+1} = -a_n/2^{n+1}$

2P (D2) Lösen der Rekursionsgleichung

2P (E2) Berechnung des Konvergenzradius

Aufgabe 3. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $f\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto f(x) := |x|$, die Einschränkung der Euklidischen Norm auf A.

Zeigen Sie:

(a) Falls A abgeschlossen ist, dann nimmt die Funktion f auf A ein Minimum an (d.h. es gibt eine Minimalstelle $P_0 \in A$, so dass $f(P_0) \leq f(P)$ für alle $P \in A$ gilt).

(b) Die Aussage (a) ist im Allgemeinen falsch, wenn wir nicht annehmen, dass A abgeschlossen ist.

(c) Falls A konvex ist, dann wird das Minimum in höchstens einem Punkt von A angenommen.

(d) Sei $0 \notin A$. Dann ist $P_0 \in \partial A$ für alle Minimalstellen $P_0 \in A$ von f.

Erinnerung: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst *konvex*, falls für alle $P, Q \in A$ die Strecke PQ in A enthalten ist. Der Rand ∂A von $A \subset \mathbb{R}^n$ besteht aus den Punkten des Abschlusses von A, die keine inneren Punkte von A sind.

Lösung:

(a) Sei $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq r\}$ der abgeschlossene Ball mit Radius r und Mittelpunkt 0. Da A nichtleer ist, können wir ein genug grosses r_0 wählen, so dass $A' = B_r \cap A$ nichtleer ist. Weil B_r und A beide abgeschlossen sind, ist A' auch abgeschlossen. Weil ausserdem $A' \subset B_r$ ist, ist A' beschränkt und darum nach Heine-Borel kompakt. Die stetige Funktion f auf A' eingeschränkt nimmt wegen Kompaktheit von A' ihr Minimum an. Sei P_0 ein Minimum von f auf A', also $f(P_0) \leq f(P)$ für alle $P \in A'$, bemerke auch $f(P_0) \leq r$. Da ausserdem $f(P) > r$ für alle $P \in A \setminus A'$ gilt, folgt $f(P_0) \leq f(P)$ für alle $P \in A$.

(b) Gegenbeispiel: $n = 1$, $A = (0, 1)$. Dann ist $f(A) = (0, 1)$, welches kein Minimum auf A annimmt.

(c) Wir zeigen zuerst, dass für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^3$ in der Dreiecksungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

genau dann Gleichheit gilt, wenn $x = \lambda y$ mit $\lambda > 0$. In der Tat folgt aus Cauchy-Schwarz:

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

mit Gleichheit genau dann wenn $x \cdot y = |x||y|$, welches mit Cauchy-Schwarz genau dann passiert, wenn $x = \lambda y$ mit $\lambda > 0$.

Seien nun P_0, P_1 beides Minimalstellen einer konvexen nichtleeren Menge A mit $|P_0| = |P_1| = r$. Definiere den Punkt $P = \frac{P_0+P_1}{2}$, welcher nach Konvexität auch in A liegt. Dann ist wegen Minimalität von r auf A

$$r \leq |P| \left|\frac{P_0 + P_1}{2}\right| = \frac{1}{2}|P_0 + P_1| \leq \frac{1}{2}(|P_0| + |P_1|) = r.$$

Also sind alle Ungleichungen Gleichungen. Aus der Gleichheit in der Dreiecksungleichung folgt also, dass $P_0 = \lambda P_1$ mit $\lambda > 0$ ist. Doch weil $|P_0| = |P_1|$ ist, muss $\lambda = 1$ sein und darum $P_0 = P_1$, was beweist, dass es nur eine Minimalstelle von f gibt.

(d) Sei $0 \notin A$ und $P_0 \in A$ eine Minimalstelle von f. Sei P_0 nicht in ∂A, also P_0 ein innerer Punkt. Wir führen das zum Widerspruch. Per Definition gibt es ein $\epsilon' > 0$, so dass $B_{\epsilon'}(P_0) \subset A$. Sei $\epsilon = \min\{\epsilon', |P_0|\}$. Dann ist auch $P_1 := P_0 - \frac{\epsilon P_0}{2|P_0|} \in B_\epsilon(P_0) \subset A$, da $|P_0 - P_1| = \frac{\epsilon}{2}$ ist. Ausserdem ist

$$f(P_1) = \left|P_0 - \frac{\epsilon P_0}{2|P_0|}\right| = |P_0| - \frac{\epsilon|P_0|}{2|P_0|} = |f(P_0)| - \frac{\epsilon}{2},$$

wobei wir in der zweiten Gleichung benutzt haben, dass $\epsilon \leq |P_0|$ ist. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $f(P_0)$ minimal ist. Also muss $P_0 \in \partial A$ sein.

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

1P (1A) Idee den Schnitt mit einem grossen Ball zu nehmen

2P (2B) Heine–Borel korrekt anwenden

1P (1C1) stetige Funktionen nehmen ihr Minimum auf kompakter Menge an

1P (1C2) Schlussfolgerung

Alternativ:

1P (1A') Kontruktion einer Folge (x_n) so dass $(f(x_n))$ gegen das Infimum von f auf A konvergiert

2B' Begründung, dass (x_n) beschränkt ist und mit Bolzano–Weierstrass eine konvergente Teilfolge (y_n) besitzt

1C' A ist abgeschlossen, also ist der Grenzwert y of (y_n) in A

1D' Der Grenzwert $f(y)$ of $f(y_n)$ ist gleich das Infimum von f auf A.

(b) 3 Punkte

3P (3D) Gegenbeispiel (**2P (2D)**) falls korrektes Gegenbeispiel mit falscher Begründung)

(c) 7 Punkte

1P (1E) Punkte auf einer Linie zwischen Minima sind auch in A

2P (2F, 2F') Cauchy–Schwarz Ungleichung korrekt angewendet oder korrektes geometrisches Argument (falsch angewendet **1P (1F')**)

2G1 Gleichheit in Cauchy-Schwarz impliziert, kolinear

2G2 Minima müssen also gleich sein

Alternative:

1P (1E) wie oben

3P (3F") Pythagoras auf Mittelpunkt angewendet

3P (3G") Begründung, warum man Pythagoras anwenden kann

(d) 5 Punkte

2P (2H) Falls Minimum im Innern ist, gibt es einen Ball darum in A

3P (3I) Beweis, dass es einen Punkt im Ball gibt, welcher näher an 0 ist (**1P (1I)** ohne oder mit falscher Begründung)

(d) alternative 5 Punkte

3H' the derivative of f at point x does not vanish if $x \neq 0$ (+ writing the matrix)

1H' if they don't write what the derivative is or if they write it wrong.

2I' therefore f does not have extrema in the interior

Aufgabe 4. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$, mit $a_1, a_2, a_3 > 0$ und $b \neq 0$. Finden Sie die Extremwerte $\max\{f(x) \,|\, x \in E\}$, $\min\{f(x) \,|\, x \in E\}$ der linearen Funktion $f(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ auf dem Ellipsoid

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \right\}$$

und bestimmen Sie die Punkte von E, wo diese Extremwerte angenommen werden.

Lösung: Da das Ellipsoid E kompakt ist finden wir alle Extrema durch Lagrange-Multiplikatoren. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 - \lambda \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 \right).$$

Wir berechnen die Ableitungen und setzen sie 0:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{x_1} L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = b_1 - \frac{2\lambda x_1}{a_1^2} \\
0 &= \partial_{x_1} L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = b_2 - \frac{2\lambda x_2}{a_2^2} \\
0 &= \partial_{x_3} L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = b_3 - \frac{2\lambda x_3}{a_3^2} \\
0 &= \partial_{\lambda} L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = -\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1
\end{aligned}$$

Weil per Annahme $b \neq 0$ ist, kann $\lambda = 0$ nicht sein. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ erhalten wir $x_i = \frac{b_i a_i^2}{2\lambda}$ und darum mit der letzten Gleichung:

$$1 = \frac{b_1^2 a_1^2 + b_2^2 a_2^2 + b_3^2 a_3^2}{4\lambda^2}$$

und darum

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 a_1^2 + b_2^2 a_2^2 + b_3^2 a_3^2} \qquad \text{und} \qquad x_i^{\pm} = \pm \frac{b_i a_i^2}{\sqrt{b_1^2 a_1^2 + b_2^2 a_2^2 + b_3^2 a_3^2}}.$$

Die Funktionswerte bei den zwei kritischen Punkten sind

$$f(x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, x_3^{\pm}) = \pm \frac{b_1^2 a_1^2 + b_2^2 a_2^2 + b_3^2 a_3^2}{\sqrt{b_1^2 a_1^2 + b_2^2 a_2^2 + b_3^2 a_3^2}} = \pm \sqrt{b_1^2 a_1^2 + b_2^2 a_2^2 + b_3^2 a_3^2}.$$

Das Minimum ist also bei x^- und das Maximum bei x^+.

Punkteverteilung:

10P (Lagrange-Gleichungen)

- **4P (A)** Lagrange-Funktion. Nur **1P** für $f - \lambda g = 0$. Nur **1P** für $g - \lambda f$ oder nur Erwähnung von Lagrange-Multiplikatoren.
- **2P (B)** Idee Ableiten **1P** und Nullsetzen **1P**
- **4P (C)** je **1P** pro Ableitung.

10P (Auflösen der Gleichungen)

- **D 2P** Aufstellen der korrekten Relationen für x_i (in Abhängigkeit von λ)
- **E 1P** Begründung, warum $\lambda \neq 0$ gelten muss
- **F 2P** Einsetzen in die Nebenbedingungen
- **G 1P** Auflösen der Gleichung nach λ

Alternative:

- **D 2P** Aufstellen der Relationen für x_2, x_3 (in Abhängigkeit von x_1). Nur **1P** für keine Besprechung von $x_1 \neq 0$
- **E 1P** Korrekte Fallunterscheidung $b_i \neq 0$
- **F 2P** Korrektes Einsetzen in die Nebenbedingungen
- **G 1P** Auflösen der Gleichung nach x_1

Schlussfolgerung:

- **H 2P** Berechnung der Vektoren $x^{\pm}$. Keine Punkte, falls die möglichen Vorzeichen als voneinander unabhängig interpretiert werden, also insgesamt acht kritische Punkte entstehen
- **J 1P** Berechnung der Werte von f an den Punkten $x^{\pm}$
- **K 1P** Korrekte Identifikation des maximalen und des minimalen Werts

Aufgabe 5. Sei $a \geq 0$. Wir betrachten die durch die Potenzreihe

$$h_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^n$$

definierte Funktion (Γ ist die Eulersche Gamma-Funktion).

(a) Beweisen Sie: Die Reihe $h_a(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.

Hinweis: Sie können zum Beispiel zeigen, dass $\Gamma(n+a+1) \geq n!\,\Gamma(a+1)$ für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $y(x) = h_a(x)$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$xy' = (x-a)y + a$$

ist.

(c) Finden Sie alle weiteren für $x \in (0, \infty)$ definierten Lösungen $x \mapsto y(x)$ dieser Differenzialgleichung.

(d) Zeigen Sie: Wenn $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dann ist $\frac{x^{a+1}}{(a+1)!} h_{a+1}(x)$ der a-te Restterm der Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^a}{a!} + \frac{x^{a+1}}{(a+1)!} h_{a+1}(x).$$

Lösung:

(a) Wir zeigen den Hinweis:

$$\Gamma(n+a+1) = (n+a)(n+a-1)\cdots(a+1)\Gamma(a+1) \geq n(n-1)\cdots 1\Gamma(a+1) = n!\Gamma(a+1).$$

Weil $\left|\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^n\right| \leq \frac{|x^n|}{n!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x^n|}{n!} = \exp(|x|)$ für alle x konvergiert, konvergiert auch die Potenzreihe $h_a(x)$ für alle x durch das Majorantenkriterium.

(b) Berechnen wir

$$\begin{aligned}
xh_a'(x) &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^n \\
xh_a(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+a)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^n \\
-ah_a(x) + a &= -a\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^n\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^n
\end{aligned}$$

erhalten wir $xy' = (x-a)y + a$.

(c) Mit Separation der Variabeln folgt für die homogene DGL: $\frac{y'_H}{y\ _H} = 1 - \frac{a}{x}$ und darum $\log(y_H) = x - a\log(x) + \tilde{C}$. Darum gilt $y_H = C(e^{x - a\log x})$. Mit der partikulären Lösung h_a folgt darum, dass die allgemeine Lösung

$$y = C(e^{x-a\log x}) + h_a(x)$$

für eine konstante $C \in \mathbb{R}$ ist.

(d) Wir formen um:

$$\begin{aligned} e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^a}{a!}\right) &= \sum_{n=a+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+a+1}}{(n+a+1)!} \\ &= \frac{x^{a+1}}{(a+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)!x^n}{(n+a+1)!} \\ &= \frac{x^{a+1}}{(a+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+2)x^n}{\Gamma(n+a+2)} \\ &= \frac{x^{a+1}}{(a+1)!} h_{a+1}(x). \end{aligned}$$

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

2P Beweis Hinweis

3P Schlussfolgerung

(b) 2 Punkte, keine Punkte bei unvollständiger Rechnung

(c) 8 Punkte

2P Homogene DGL

3P Lösung homogene DGL

3P Lösung inhomogene DGL

(d) 5 Punkte

2P Idee Differenz nehmen

1P Indexwechsel

2P Resultat