Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. Peter S. Jossen

27. Januar 2021

Analysis I & II Prüfung - Teil A

MATH — PHYS

Prüfungsnummer: **Legi:**

Anleitungen für Teil A (120 Minuten)

- Schreiben Sie alle Antworten auf diese Blätter, es werden keine weiteren Blätter eingesammelt! Falls Sie nicht genug Platz haben, nutzen Sie die Rückseite. Bitte lassen Sie diese Blätter zusammengeheftet.
- Sie dürfen Notizpapier verwenden.
- Falls Sie vor 10:15 fertig sind, legen Sie den Prüfungsteil A in das Kuvert zurück, und verlassen stillschweigend den Saal. Nach 10:15 bleiben Sie bitte bis zum Ende des ersten Prüfungsteils an Ihrem Platz.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle
1	[8]		**6**	[8]		**11**	[8]	
2	[8]		**7**	[8]		**12**	[8]	
3	[8]		**8**	[8]		**13**	[8]	
4	[8]		**9**	[8]		**14**	[8]	
5	[8]		**10**	[8]		**15**	[8]	

Gesamtpunktzahl:	[120]

Frage 1. Geben Sie jeweils ein Beispiel einer reellwertigen Funktion an, oder begründen Sie, warum kein solches existiert:

(a) Eine stetige surjektive Funktion $[0,1] \to [0,1)$.

(b) Eine gleichmässig stetige Funktion, welche nicht Lipschitz-stetig ist.

(c) Eine unbeschränkte, stetige Funktion definiert auf einem abgeschlossenen Intervall.

(d) Eine stetige surjektive Funktion $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\} \to \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$.

Frage 2. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper.

(a) Wann ist $(K, \leq)$ vollständig?

(b) Ist $\mathbb{Q}$ vollständig? Begründen Sie.

(c) Begründen Sie, warum jede von oben beschränkte, nichtleere Teilmenge eines vollständigen Körpers K ein Supremum in K besitzt.

Frage 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale. Für uneigentliche Grenzwerte benutzen Sie die Notation $\pm\infty$ anstatt *existiert nicht*.

Nur die Antwort zählt.

$$A = \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx, \qquad B = \int_{-1}^1 x^2 \left(e^x + 2x^2 - e^{-x}\right)\, dx,$$

$$C = \int_0^1 \frac{2}{x(x-2)}\, dx, \qquad D = \int_{-1}^1 \frac{x-2}{x-3}\, dx.$$

Frage 4. Existieren die folgenden Grenzwerte? Falls ja, berechnen Sie sie. Für uneigentliche Grenzwerte benutzen Sie die Notation $\pm\infty$ anstatt *existiert nicht*.

Nur die Antwort zählt.

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sin(x^2) - \sin^2(x)}, \qquad B = \lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} \frac{2 - x - 6x^2 + x^3}{5 - x},$$

$$C = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{\sin(\pi x)}, \qquad D = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \text{wobei } \begin{cases} a_0 = 10, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 7} - 1. \end{cases}$$

Frage 5. Es seien a, b, c positive, reelle Zahlen. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \sqrt[3]{abc}$$

gilt. Sie dürfen alle Ihnen bekannten Sätze und Techniken (beispielsweise die Regel von l'Hopital) verwenden.

Frage 6.

(a) Was besagt der (ein-dimensionale) Mittelwertsatz?

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f höchstens einen Fixpunkt (also $f(x_0) = x_0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$) haben kann.

(c) Finden Sie eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber so dass f zwei Fixpunkte hat.

Frage 7.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe für alle $x \in [2,3]$ absolut konvergiert.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$$

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_2^3 f(x)\,dx$ bis auf 2 Nachkommastellen genau. Die Abschätzung muss nicht begründet werden, nur der Rechenweg, wie man die Zahl erhalten hat.

Frage 8. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.

(a) Wann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge? Geben Sie die Definition an.

(b) Sei $0 < r < 1$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, welche $|x_n - x_{n+1}| \leq r^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge in $\mathbb{R}$ definiert durch $x_0 = 0, x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + \frac{2x_{n-1}}{3}$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Frage 9. Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die stetig differenzierbare Funktion gegeben durch

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

(a) Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Ableitung $Df(x, y)$ invertierbar?

(b) Besitzt die Funktion f eine stetig differenzierbare Inverse?

Frage 10.

(a) Was besagt der Satz von Stokes?

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $F(x, y, z) = (y, xz^3, -zxy^3)$ und $C \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kreis gegeben durch die Bedingungen $x^2 + y^2 = 4$ und $z = -3$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_C F\, dt,$$

wobei C von oben betrachtet die Orientierung im Gegenuhrzeigersinn hat.

Frage 11. Seien $0 < h_1 < h_2$ reelle Zahlen. Bestimmen Sie die z-Koordinate des Schwerpunktes des Kegelstumpfes

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\, h_1 \le z \le h_2\}.$$

Aus der Physik wissen Sie, dass diese durch

$$S_z = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \int_E z \, dx \, dy \, dz$$

gegeben ist. Sie wissen ebenfalls, dass ein Kegel mit Grundfläche von Radius $R > 0$ und Höhe H das Volumen $\frac{R^2 H\pi}{3}$ hat.

Frage 12. Es seien $H \subseteq \mathbb{R}^3$ das Hyperboloid, und $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ebene gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 + 2xz - 2yz = 2z^2 - 20\} \\ E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $E \cap H = \emptyset$ gilt.

(b) Finden Sie die Punkte in H, welche am nächsten zur Ebene E sind.

Frage 13. Sei $f : (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = \frac{x}{(2-x)(1-3x)}$. Finden Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 der Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Nur die Antwort zählt.

Frage 14. Seien $a, b, c > 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass jede reellwertige Lösung der Differentialgleichung $ay'' + by' + cy = 0$ die Eigenschaft

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

erfüllt.

Frage 15.

(a) Definieren Sie *Ordnungsrelation* und *geordnete Menge*.

(b) Was besagt das Zorn'sche Lemma?

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. Peter S. Jossen 27. Januar 2021

Analysis I & II Prüfung - Teil B

MATH — PHYS

Prüfungsnummer: **Legi:**

Anleitungen für Teil B (120 Minuten)

- Lesen Sie alle fünf Aufgaben aufmerksam durch. Entscheiden Sie sich anschliessend für *eine* Aufgabe, die sie *nicht* machen möchten.

Folgende Aufgabe mache ich nicht:

- Lösen Sie die anderen vier Aufgaben auf separaten Blättern. Bitte nummerieren Sie Ihre Blätter und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrer Nummer und Ihren Initialen.
- Am Ende der Prüfung legen Sie den Prüfungsteil Teil B mit Ihren Blättern ins Kuvert, bitte in der richtigen Reihenfolge. Es werden keine losen Blätter eingesammelt.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle
	[30]	
	[30]	
	[30]	
	[30]	

Gesamtpunktzahl: [120]

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge, und sei $f_A : X \to \mathbb{R}$ die durch

$$f_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

definierte Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_A stetig ist. Ist f_A sogar gleichmässig stetig? Falls ja, dann beweisen Sie das, und falls nicht, erklären Sie warum.

(b) Wie ist der *Abschluss* von A in X definiert?

(c) Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge von f_A genau der Abschluss von A ist.

(d) Sei $B \subseteq X$ eine weitere Teilmenge. Analog zu f_A wird f_B definiert. Folgt aus $f_A = f_B$ auch $A = B$?

Aufgabe 2.

(a) Was ist eine Lebesgue Nullmenge? Geben Sie die Definition.

(b) Kann eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue Nullmenge sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Sind beschränkte Lebesgue Nullmengen abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie: Jede abzählbare Vereinigung von Lebesgue Nullmengen ist eine Lebesgue Nullmenge.

(e) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph von f, aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, eine Lebesgue Nullmenge ist.

Aufgabe 3. Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion, und es sei F das Vektorfeld auf $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0)\}$ definiert durch

$$F(x, y, z) = \Big((1 + x)e^{x+\frac{1}{y}}, \quad -\tfrac{x}{y^2}e^{x+\frac{1}{y}}, \quad g'(z)\Big)$$

(a) Ist die Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen? Ist Sie zusammenhängend? Ist Sie einfach zusammenhängend?

(b) Erfüllt das Vektorfeld F die Integrabilitätsbedingungen?

(c) Ist F konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Besitzt das Vektorfeld F ein Potential? Falls Ja, geben Sie eines an. Falls Nein, erklären Sie warum nicht.

(e) Wie sind *Arbeitsintegrale* allgemein definiert?

(f) Es sei $\gamma : [0, 1] \to U$ der Pfad gegeben durch

$$\gamma(t) = (t\cos(2\pi t), \quad 2 + t\sin(2\pi t), \quad t^2 - t + 1).$$

Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_\gamma F dt.$$

Aufgabe 4. Es seien R, a, b nichtnegative reelle Zahlen. Wir definieren eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ durch

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\} \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by.$$

(a) Erklären Sie, warum die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ ihr Maximum auf B annimmt. Zitieren Sie die Sätze, die Sie benutzen, vollständig.

(b) Skizzieren Sie die Menge B und den Gradienten der Funktion f.

(c) Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f : B \to \mathbb{R}$, und geben Sie alle Punkte $(x, y) \in B$ an, an denen dieses Maximum angenommen wird.

Aufgabe 5. Der *Integralsinus* ist die durch

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

definierte Funktion $\mathrm{Si} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Erklären Sie, warum das Integral konvergiert.

(b) Geben Sie die Taylor-Reihe von $\mathrm{Si}(x)$ an (im Punkt $x_0 = 0$).

(c) In einer Formelsammlung finden Sie $\lim_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2}$, und auf einer dubiosen Internetseite finden Sie folgenden "Beweis" dazu:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{Si}(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(t) \exp(-ts)\, ds\, dt = \int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2}$$

Geben Sie Details zu den Rechenschritten an, und begründen Sie warum die Rechnung funktioniert, oder warum sie nicht funktioniert. Geben Sie dabei präzise an, welche Resultate aus der Vorlesung Sie benutzen.