Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Giovanni Felder

9. August 2021

Analysis I & II Prüfung - Teil A

MATH — PHYS

Prüfungsnummer: Legi:

Anleitungen für Teil A (120 Minuten)

- Schreiben Sie alle Antworten auf diese Blätter, es werden keine weiteren Blätter eingesammelt! Falls Sie nicht genug Platz haben, nutzen Sie die Rückseite. Bitte lassen Sie diese Blätter zusammengeheftet.
- Sie dürfen Notizpapier verwenden.
- Falls Sie vor 10:15 fertig sind, legen Sie den Prüfungsteil A in das Kuvert zurück, und verlassen stillschweigend den Saal. Nach 10:15 bleiben Sie bitte bis zum Ende des ersten Prüfungsteils an Ihrem Platz.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle
1	[8]		**6**	[8]	
2	[8]		**7**	[8]	
3	[8]		**8**	[8]	
4	[8]		**9**	[8]	
5	[8]		**10**	[8]	
Gesamtpunktzahl:	[80]				

Frage 1.

(a) Wie ist das Supremum $\sup A$ einer nichtleeren beschränkten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ definiert?

(b) Beweisen Sie, dass $\sup\{\sin(x) \,|\, x \in \mathbb{Q}\} = 1$.

Frage 2. Wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ gilt.

(a) Was erhalten wir, wenn wir nur über die geraden natürlichen Zahlen n summieren?

(b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

(c) Berechnen Sie das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\, dx.$$

Frage 3. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0, \dots, a_7$ des Taylorpolynoms von arccos um $x = 0$

$$\arccos(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_7 x^7 + O(x^8).$$

Frage 4. Wir wissen, dass ein metrischer Raum (X, d) *vollständig* heisst, falls alle Cauchy-Folgen in X konvergent sind.

(a) Wie sind Cauchy-Folgen in einem metrischen Raum definiert?

(b) Ist $X = \mathbb{Z}$ mit Metrik $d\colon (n, m) \mapsto |n - m|$ vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Beweisen Sie, dass kompakte metrische Räume vollständig sind.

Hinweis: Am besten verwenden Sie, dass für metrische Räume Kompaktheit und Folgen-Kompaktheit äquivalent sind.

Frage 5. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\varphi(x) = (x_1^3 - x_2, x_2 + x_1)$, wobei $x = (x_1, x_2)$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung $D_x\varphi$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \varphi(\mathbb{R}^2)$ ein Diffeomorphismus ist.

(c) Was ist der Flächeninhalt des Bildes $\varphi(Q)$ des Quadrats $Q = [0,1] \times [0,1]$ unter φ?

Frage 6. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Anfangswertprobleme.

(a) $y''(x) = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

(b) $y'(x) = y(x) + x$, $y(0) = 0$.

(c) $y'(x) = x^2 y(x)^2$, $y(0) = 1$.

(d) $y''(x) = y'(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Nur die Antwort zählt.

Frage 7. Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie eine Basis des Tangentenraumes T_pM in $p = (-1, 2, 3) \in M$ an.

Frage 8. Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ die Teilmenge

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

(a) Ist P kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie das Volumen von P.

Frage 9. Berechnen Sie.

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{4-x^2}\, dx$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n}$

(c) $\int_A 1\, dxdy$, wobei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| + |y| \leq 1\}$.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{\sin(2x^4)}$

Nur die Antwort zählt.

Frage 10. Sei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| \leq 1\}$ der Einheitsball mit Mittelpunkt 0 und Radius 1.

(a) Formulieren Sie den Divergenzsatz für den glatt berandeten Bereich $B_1(0)$.

(b) Zeigen Sie: Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld v auf $\mathbb{R}^3$ hängt

$$I_n = \int_{B_1(0)} \operatorname{div}\left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^n v(x)\right) \,\mathrm{dvol}(x)$$

nicht von $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ab: $I_n = I_m$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Giovanni Felder 9. August 2021

Analysis I & II Prüfung - Teil B

MATH — PHYS

Prüfungsnummer: **Legi:**

Anleitungen für Teil B (120 Minuten)

- Lesen Sie alle fünf Aufgaben aufmerksam durch. Entscheiden Sie sich anschliessend für *eine* Aufgabe, die sie *nicht* machen möchten.

Folgende Aufgabe mache ich nicht:

- Lösen Sie die anderen vier Aufgaben auf separaten Blättern. Bitte nummerieren Sie Ihre Blätter und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrer Nummer und Ihren Initialen.
- Am Ende der Prüfung legen Sie den Prüfungsteil Teil B mit Ihren Blättern ins Kuvert, bitte in der richtigen Reihenfolge. Es werden keine losen Blätter eingesammelt.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle
	[20]	
	[20]	
	[20]	
	[20]	

Gesamtpunktzahl:	[80]

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(x) = \int_{x-1}^{x+1} \cos(\pi t^2)\, dt$. Sie brauchen das Integral *nicht* explizit zu berechnen.

(a) Ist f stetig differenzierbar? Ist sie beschränkt? Ist sie eine gerade Funktion? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_1, \dots, a_4$ des vierten Taylor-Polynoms von f um 0:

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \cos(\pi t^2) dt + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + O(x^5).$$

(c) Finden Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Für die kritischen Punkte $x = 0$ und $x = 1$ entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima, Minima oder keines der beiden handelt.

Aufgabe 2. Eine Folge von Funktionen $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei durch folgende Rekursionsrelation definiert:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \\ f_{n+1}(x) &= \frac{1 - x f_n(x/2)}{2}, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen eine stetige Funktion auf $[-1,1]$ konvergiert.

(b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} f_n(0)$.

(c) Zeigen Sie, dass es genau eine stetige Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = \frac{1 - x f(x/2)}{2}$$

für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

(d) Schreiben Sie diese Funktion f als Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

Aufgabe 3. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $f\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto f(x) := |x|$, die Einschränkung der Euklidischen Norm auf A.

Zeigen Sie:

(a) Falls A abgeschlossen ist, dann nimmt die Funktion f auf A ein Minimum an (d.h. es gibt eine Minimalstelle $P_0 \in A$, so dass $f(P_0) \leq f(P)$ für alle $P \in A$ gilt).

(b) Die Aussage (a) ist im Allgemeinen falsch, wenn wir nicht annehmen, dass A abgeschlossen ist.

(c) Falls A konvex ist, dann wird das Minimum in höchstens einem Punkt von A angenommen.

(d) Sei $0 \notin A$. Dann ist $P_0 \in \partial A$ für alle Minimalstellen $P_0 \in A$ von f.

Erinnerung: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst *konvex*, falls für alle $P, Q \in A$ die Strecke PQ in A enthalten ist. Der Rand ∂A von $A \subset \mathbb{R}^n$ besteht aus den Punkten des Abschlusses von A, die keine inneren Punkte von A sind.

Aufgabe 4. Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$, mit $a_1, a_2, a_3 > 0$ und $b \neq 0$. Finden Sie die Extremwerte $\max\{f(x) \,|\, x \in E\}$, $\min\{f(x) \,|\, x \in E\}$ der linearen Funktion $f(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ auf dem Ellipsoid

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \right\}$$

und bestimmen Sie die Punkte von E, wo diese Extremwerte angenommen werden.

Aufgabe 5. Sei $a \geq 0$. Wir betrachten die durch die Potenzreihe

$$h_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^n$$

definierte Funktion (Γ ist die Eulersche Gamma-Funktion).

(a) Beweisen Sie: Die Reihe $h_a(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.

Hinweis: Sie können zum Beispiel zeigen, dass $\Gamma(n+a+1) \geq n!\,\Gamma(a+1)$ für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $y(x) = h_a(x)$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$xy' = (x-a)y + a$$

ist.

(c) Finden Sie alle weiteren für $x \in (0, \infty)$ definierten Lösungen $x \mapsto y(x)$ dieser Differenzialgleichung.

(d) Zeigen Sie: Wenn $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dann ist $\frac{x^{a+1}}{(a+1)!} h_{a+1}(x)$ der a-te Restterm der Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^a}{a!} + \frac{x^{a+1}}{(a+1)!} h_{a+1}(x).$$