Frage 1. Berechnen Sie (nur die Antwort zählt).

(a) $\int \cos(x^2)x\,dx$,

(b) $3 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^5} + \dfrac{1}{3^7} + \cdots$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x \log x)}{\cos(\pi x/2)}$,

(d) $\displaystyle\int_{B_1(0)} (x^2+y^2)\,dxdy$, wobei $B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2+y^2 \le 1\}$.

Lösung:

(a) Aus $\sin(x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$ folgt $\int \cos(x^2)x\,dx = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$.

(b) Mit der geometrischen Reihe finden wir

$$3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \cdots = 3\sum_{k=0} \frac{1}{9^k} = 3\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{27}{8}.$$

(c) L'Hopital impliziert

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x\log x)}{\cos(\pi x/2)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x\log x)(x\frac{1}{x} + \log x)}{-\sin(\pi x/2)\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

(d) Mit Polarkoordinaten erhalten wir

$$\int_{B_1(0)} (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,rdrd\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Punkteverteilung:
je 2 Punkte

Frage 2.

(a) Definieren Sie den Limes superior einer von oben beschränkten Folge in $\mathbb{R}$. Falls Sie dazu weitere Begriffe verwenden, z.B. Häufungspunkte oder Supremum, dann definieren Sie diese.

(b) Beweisen Sie: Falls alle Teilfolgen einer von oben beschränkten Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$ denselben Limes superior $s \in \mathbb{R}$ haben, dann gilt $s = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Lösung:

(a) Das Supremum $s = \sup A$ einer von oben beschränkten Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist die eindeutige Zahl s in $\mathbb{R}$, so dass

- $x \leq s$ für alle $x \in A$ (s ist eine obere Schranke),
- falls $\widetilde{s} \in \mathbb{R}$ so ist, dass $x \leq \widetilde{s}$ für alle $x \in A$, dann ist $s \leq \widetilde{s}$ (s ist kleiner als alle anderen oberen Schranken).

Analog ist das Infimum $t = \inf B$ einer von unten beschränkten Menge $B \subset \mathbb{R}$ definiert (alternativ: $t = -\sup -B$). Der Limes superior einer von oben beschränkten Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$ ist

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{m\geq n} x_n \right).$$

(b) Falls alle Teilfolgen einer von oben beschränkten Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$ denselben Limes superior $s \in \mathbb{R}$ haben, gilt auch $s = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Falls x_n nicht gegen s konvergieren würde, gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine unendliche Teilmenge $\Lambda \subset \mathbb{N}$, so dass $\{x_n \,|\, n \in \Lambda\}$ komplett ausserhalb von $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ liegt. Seien nun

$$\Lambda_- = \{n \in \Lambda \,|\, x_n \leq s - \epsilon\} \qquad \text{und } \Lambda_+ = \{n \in \Lambda \,|\, x_n \geq s + \epsilon\}.$$

Weil $\Lambda = \Lambda_- \cup \Lambda_+$ ist, muss eine der beiden Mengen $\Lambda_\pm$ unendlich sein. Falls Λ_i unendlich ist, hat die Teilfolge $(x_n)_{n\in\Lambda_-}$ einen Limes superior, welcher höchstens $s-\epsilon$ (da alle Elemente kleiner als $s-\epsilon$ sind). Analog, falls Λ_+ unendlich ist, hat die Teilfolge $(x_n)_{n\in\Lambda_+}$ einen Limes superior, welcher mindestens $s+\epsilon$ ist. Widerspruch.

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte

2P Definition sup und inf, oder alternativ: Definition Häufungspunkt

2P Definition lim sup

(b) 4 Punkte

je 1P für **(C)** Kontraposition, **(D)** Definition der unendlichen Menge Λ, **(E)** eine Menge aus $\Lambda_\pm$ ist unendlich, **(F)** Schlussfolgerung

Frage 3. Geben Sie jeweils ein Beispiel einer reellwertigen Funktion an, oder begründen Sie, warum keine solche existiert:

(a) Eine surjektive Funktion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

(b) Eine bijektive Funktion $(-1, 1) \to \mathbb{R}$.

(c) Eine gleichmässig stetige, unbeschränkte Funktion $(-1, 1) \to \mathbb{R}$.

(d) Eine Riemann-integrierbare Funktion $[-1, 1] \to \mathbb{R}$, welche nicht stetig ist.

Lösung:

(a) Nicht möglich. Weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, wäre $\mathbb{R}$ auch abzählbar, was nicht wahr ist.

(b) $f(x) = \tan(\pi x/2)$.

(c) Nicht möglich. Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Wir zeigen, dass dann f beschränkt sein muss. Sei $\epsilon = 1$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq 1$ für alle $x, y \in (-1, 1)$ mit $|x - y| \leq \delta$ gilt. Darum $|f(x) - f(0)| \leq 1$ für alle $x \in [-\delta, \delta]$, $|f(x) - f(0)| \leq 2$ für alle $x \in [-2\delta, 2\delta]$, etc. Für $N \in \mathbb{N}$ gross genug, so dass $N\delta \geq 1$ ist, folgt dann induktiv $|f(x) - f(0)| \leq N$ für alle $x \in (-1, 1)$.

(d) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & -1 < x < 0. \end{cases}$

Punkteverteilung: je 2 Punkte: **(1P)** für korrekte Antwort, **(1P)** für Beispiel oder Begründung, warum nicht existent

Frage 4. Finden Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung 4. Ordnung

$$y''''(x) + 2y(x) = x^3.$$

Lösung:

Eine partikuläre Lösung ist $y_p(x) = \frac{x^3}{2}$. Für die homogene DGL $y'''' + 2y = 0$ suchen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Also alle $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $\lambda^4 + 2 = 0$. Wir finden

$$\lambda \in \sqrt[4]{2}\{e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4}\} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}\{1+i, 1-i, -1-i, -1+i\}.$$

Sei $a = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}$. Reelle Lösungen der homogenen DGL haben damit die Form

$$y_h(x) = C_1 e^{ax}\cos(ax) + C_2 e^{ax}\sin(ax) + C_3 e^{-ax}\cos(ax) + C_4 e^{-ax}\sin(ax)$$

für reelle Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Punkteverteilung:

2P partikuläre Lösung

5P homogene Lösung

- **1P** Versuch mit char. Polynom
- **2P** Nullstellen des char. Polynoms
- **1P** Schlussfolgerung
- **1P** Finde alle Lösungen

1P Lösung als Summe partikulärer und homogener Lösung

Frage 5. Berechnen Sie das Flussintegral $\int_S v \cdot n \, dA$ des Vektorfeldes

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + \log(1+y^2+z^2) \\ y - \log(1+x^2+z^2) \\ -z + \log(1+x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

durch die Kugeloberfläche mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius R von innen nach aussen.

Lösung:

Wir wenden den Satz von Gauss auf den Rand $\partial B = S$ des Balles $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ an. Die Divergenz von v ist

$$\mathrm{div}(v) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Mit dem Satz von Gauss ist

$$\int_S v \cdot n \, dA = \int_B \mathrm{div}(v) \, \mathrm{dvol} = \int_B \mathrm{dvol} = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

Punkteverteilung:

2P Divergenz ist 1

3P Volumen Kugel

3P Kombination mit Divergenzsatz

Frage 6.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 der Taylorreihe um $x = 0$ der Funktion

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + O(x^{n+1}).$$

(b) Finden Sie eine allgemeine Formel für a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (eine richtige Lösung von (b) gibt die volle Punktzahl).

Lösung:
Sei $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Mit der Taylorreihe der Exponentialfunktion finden wir

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + \cdots = \sum_{k=0} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{k=0} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}.$$

Potenzreihen können punktweise integriert werden:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{k=0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{k=0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{k=0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Unterscheiden wir zwischen geraden und ungeraden Koeffizienten, erhalten wir

$$a_{2n} = 0 \qquad \text{und} \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte

(b) 4 Punkte

2P $a_{2n} = 0$

2P $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$

Frage 7.

(a) Ergänzen Sie: Ein nicht-leerer metrischer Raum X heisst *wegzusammenhängend*, falls ...

(b) Sei $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn $n \geq 2$.

Lösung:

(a) ..., falls für je zwei Punkte $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ (ein Weg) mit $x = \gamma(0)$ und $y = \gamma(1)$ existiert.

(b) $S^0 = \{\pm 1\}$ ist nicht wegzusammenhängend: Falls es eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to \{\pm 1\}$ mit $-1 = \gamma(0)$ und $1 = \gamma(1)$ gibt, dann ist $[0,1] = \gamma^{-1}(\{-1\}) \cup \gamma^{-1}(\{1\})$ eine nicht-triviale disjunkte Zerlegung von $[0,1]$ durch offene Mengen. Doch dies kann nicht sein, da $[0,1]$ zusammenhängend ist.

Sei nun $n \geq 1$. Für Punkte $x, y \in S^{n-1}$, so dass $x \neq -y$ ist können wir den Weg

$$\gamma_{x,y}(t) = \frac{(1-t)x + ty}{||(1-t)x + ty||}$$

nehmen. Falls $(1-t)x + ty = 0$ wäre, dann folgt aus $||(1-t)x|| = ||ty||$, dass $t = \frac{1}{2}$ wäre, $(1-t)x + ty$ also dem Mittelpunkt zwischen x und y entspricht. Doch dieser ist nicht 0, da $x \neq y$ ist. Ausserdem ist durch die Normierung der Weg $\gamma_{x,y}$ tatsächlich in S^{n-1}. Falls $x = -y$ können wir den Weg $\gamma_{wy} \circ \gamma_{xw}$ für einen beliebigen anderen Punkt $w \in S^{n-1}$ verwenden.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

(b) 6 Punkte

2P S^0 nicht zusammenhängend

4P S^k zusammenhängend für $k \geq 1$

- **2P** Finde Pfad γ
- **2P** Wohldefiniertheit von γ in S^k

Frage 8. Sei $n \geq 1$ und $A = \{x \in (0,1]^n \,|\, x_1 + \cdots + x_n = 1\}$. Sei die Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \log(x_i).$$

(a) Zeigen Sie, dass f genau einen kritischen Punkt p im Inneren von A besitzt und bestimmen Sie den Wert $f(p)$.

(b) Beweisen Sie, dass f auf A bei p ihr Minimum annimmt.

Lösung:

(a) Lagrangemultiplikatoren führen zur Funktion

$$g(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log(x_i) + \lambda(x_1 + \cdots + x_n - 1).$$

und darum zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 + \log(x_1) + \lambda = 0, \\ \cdots \\ 1 + \log(x_n) + \lambda = 0, \\ x_1 + \cdots + x_n = 1. \end{aligned}$$

Aus den ersten n Gleichungen folgt, dass alle x_i gleich sein müssen (da log injektiv ist). Aus letzter Gleichung finden wir den kritischen Punkt $p \in A$, gegeben durch $p_i = \frac{1}{n}$ mit

$$f(p) = n \cdot \frac{\log(1/n)}{n} = -\log(n)$$

(b) Dank den Lagrangemultiplikatoren wissen wir schon, dass p der einzige kritische Punkt im Innern ist. Wir müssen also noch untersuchen, wie sich $\lim_{x \to y} f(x)$ für $y \in \partial A$ verhält.

- Falls eine Koordinate $x_i \to 1$, dann gehen alle $x_j \to 0$ für $i \neq j$ (wegen $x_1 + \cdots + x_n = 1$). Dann ist $f(y) = 0$, da $\lim_{t \to 0} t \log t = 0$ und $\lim_{t \to 1} t \log t = 0$.
- Falls eine Koordinate $x_i \to 0$ geht, wird das Problem auf eine Dimension kleiner reduziert. Doch dann kann induktiv $f(x)$ nicht kleiner als $-\log(n-1)$ sein (für $n = 1$ ist $A = \{1\}$ und $f = 0$).

Dies zeigt, dass $f(x) \geq -\log n = f(p)$ für alle $x \in A$, die Funktion f also Minimum $-\log n$ bei $p \in A$ hat.

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

je 1P für Lagrangefunktion, Ableitung nach den x_i, Ableitung nach λ, Finden von p, Berechnung von $f(p)$

(b) 3 Punkte

Frage 9. Sei $y(x) = \int_0^1 \cos(\pi x t^2)\,dt$. Beweisen Sie, dass y eine Lösung der Differenzialgleichung

$$2xy'(x) + y(x) = \cos(\pi x)$$

ist.

Hinweis: Partielle Integration.

Lösung: Als Parameterintergal dürfen wir die Ableitung in das Integral reinziehen:

$$\begin{aligned}
2xy'(x) &= 2x\frac{d}{dx}\int_0^1 \cos(\pi x t^2)\,dt = 2x\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\cos(\pi x t^2)\,dt \\
&= -2x\int_0^1 \pi t^2 \sin(\pi x t^2)\,dt = \int_0^1 t\cdot -2\pi x t \sin(\pi x t^2)\,dt \\
&\overset{\text{PI}}{=} [t\cos(\pi x t^2)]_0^1 - \int_0^1 \cos(\pi x t^2)\,dt \\
&= \cos(\pi x) - \int_0^1 \cos(\pi x t^2)\,dt.
\end{aligned}$$

Punkteverteilung: 8 Punkte

1P **(A)** $y'(x) = \dfrac{d}{dx}y(x)$

2P **(B)** Integral und Ableitung vertauschen

2P **(C)** Ableitung berechnen

2P **(D)** partielle Integration

1P **(E)** Schlussfolgerung

Frage 10.

(a) Zeigen Sie: Die Gleichung

$$y = x^2 \arctan(f(x,y)) + f(x,y)$$

definiert eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass $f(x,0) = 0$ und berechnen Sie $\nabla f(x,0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Seien $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixiert. Die Funktion $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$z \mapsto x^2 \arctan(z) + z$$

ist bijektiv, da ihre Ableitung $z \mapsto \frac{x^2}{1+z^2} + 1 > 0$ ist (darum injektiv) und weil $\lim_{z\to\pm\infty} g_x(z) = \pm\infty$ ist (darum surjektiv mit dem Zwischenwertsatz). Es folgt, dass es für fixes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau ein $z \in \mathbb{R}$ gibt mit $y = g_x(z) = x^2 \arctan(z) + z$. Definiere $f(x,y) = z$.

Um zu zeigen, dass f stetig differenzierbar ist, benutzen wir den Satz zur impliziten Funktion: Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y,z) = x^2 \arctan(z) + z - y$. Die Ableitung von F ist

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \arctan z \\ -1 \\ \frac{x^2}{1+z^2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Satz zur impliziten Funktion ist $F(x,y,z) = 0$ stetig differenzierbar nach z auflösbar, weil $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{x^2}{1+z^2} + 1 \neq 0$ für alle x, y, z.

(b) Um $f(x,0)$ zu berechnen, wollen wir das $z \in \mathbb{R}$ finden, welches $x^2 \arctan(z) + z = 0$ erfüllt. Falls $x = 0$ ist, folgt $z = 0$. Für $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$. Weil nun $\arctan(z)$ und z das gleiche Vorzeichen besitzen, kann $x^2 \arctan(z) + z = 0$ nur für $z = 0$ gelten. Daraus folgt $f(x,0) = 0$.

Für $f(x,y) = z$ folgt aus dem Satz der impliziten Funktion für den Gradienten von f:

$$\nabla f(x,y) = -\left(\frac{x^2}{1+z^2} + 1\right)^{-1} \begin{pmatrix} 2x \arctan z \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1+z^2}{1+x^2+z^2} \begin{pmatrix} 2x \arctan z \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für $(x,0)$ haben wir gesehen, dass $z = 0$ ist, also folgt:

$$\nabla f(x,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix}.$$

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte

1P **(A)** g_x bijektiv

1P **(B)** Folgerung $f(x, y)$ wohldefiniert

1P **(C)** Definition von F

1P **(D)** Satz zur impliziten Funktion auf F angewendet

(b) 4 Punkte

1P **(E)** $f(0, 0) = 0$

1P **(F)** $f(x, 0) = 0$ für alle x

1P **(G)** Formel für ∇f

1P **(H)** Berechnung ∇f

Aufgabe 1. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit reellen Koeffizienten habe Konvergenzradius 1. Sei D die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe konvergiert.

(a) Welche sind die möglichen D? Geben Sie ein Beispiel einer Potenzreihe für jede Möglichkeit.

(b) Nehmen wir zusätzlich an, dass $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$? Begründen Sie.

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$? Begründen Sie.

(d) Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen $a_n \geq 0$, die gegen 0 konvergiert. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $z = i$ und $z = -i$ konvergiert ($i = \sqrt{-1}$).

Lösung:

(a) Der Konvergenzbereich D muss ein Intervall sein, dass heisst $D_1 = (-1, 1)$ oder $D_2 = [-1, 1)$ oder $D_3 = (-1, 1]$ oder $D_4 = [-1, 1]$ sein:

- $D_1 : a_n = 1$. Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergieren beide.
- $D_2 : a_n = \frac{1}{n}$. Für $x = 1$ erhält man die harmonische Reihe, welche divergiert. Für $x = -1$ erhält man die alternierende harmonische Reihe, welche konvergiert.
- $D_3 : a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Für $x = 1$ erhält man die alternierende harmonische Reihe, welche konvergiert. Für $x = -1$ erhält man die harmonische Reihe, welche divergiert.
- $D_4 : a_n = \frac{1}{n^2}$. Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt $|a_n z^n| \leq |a_n|$. Mit dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut, also konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

(c)
- Mit l'Hopital ist der Konvergenzradius:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1.$$

- Für $x = 1$ haben wir $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$. Doch weil $n \geq \log n$ ist $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\log n}$. Darum folgt mit dem Majorantenkriterium, dass $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ divergiert, weil die harmonische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.
- Für $x = -1$ haben wir die alternierende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$. Wir können das Leibniz-Kriterium anwenden: Weil der Logarithmus log strikt monoton wächst und gegen unendlich geht, ist $(\frac{1}{\log n})_n$ strikt monoton fallend und hat Grenzwert 0. Mit Leibniz konvergiert daher die alternierende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$.

(d) Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil konvergiert. Eine komplexe Reihe konvergiert genau dann, wenn der Realteil und der Imaginärteil der Partialsumme beide konvergieren. Da $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ und $i^4 = 1$ ist, konvergiert also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n i^n$ genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(-1)^n$ (der Realteil) und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}(-1)^n$ (der Imaginärteil) konvergieren. Da die Folgen $(a_{2n})_n$ und $(a_{2n+1})_n$ beide monoton fallend sind und gegen 0 konvergieren, konvergiert die ursprüngliche Folge mit dem Leibniz Kriterium.

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

1P Intervalle

je 1P je ein Beispiel pro Intervall

(b) 3 Punkte

1P Benutze $|z| \leq 1$

1P $|a_n z^n| \leq |a_n|$

1P Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz

(c) 6 Punkte

1P Konvergenz für $x \in (-1, 1)$

1P Divergenz für $x = 1$

1P Konvergenz für $x = -1$

(d) 6 Punkte

1P Konvergenz einer komplexen Zahl ist äquivalent zu Konvergenz von Realteil und Imaginärteil

2P Finden von Realteil

2P Finden von Imaginärteil

1P Leibniz anwenden

Aufgabe 2. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen metrischen Räumen (M, d_M), (N, d_N) heisst Lipschitz-stetig, falls es ein $L > 0$ gibt, so dass $d_N(f(x), f(y)) \leq L\, d_M(x, y)$ für alle $x, y \in M$.

(a) Zeigen Sie, dass Lipschitz-stetige Abbildungen gleichmässig stetig sind.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Beweisen Sie: Die Einschränkung von f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig bezüglich der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

(c) Formulieren Sie den Banach-Fixpunktsatz.

(d) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie: Für alle hinreichend grossen $\lambda > 0$ hat die Gleichung

$$f(x) = \lambda x$$

eine eindeutige Lösung x.

Lösung:

(a) Für gegebenes ϵ können wir $\delta = \epsilon/L$ wählen.

(b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir können annehmen, dass K konvex ist, weil jede kompakte (also auch beschränkte) Menge in einem genug grossen abgeschlossenen Ball enthalten ist und Einschränkungen von Lipschitz-stetigen Funktionen Lipschitz-stetig sind.

Für jedes $x, y \in K$ gibt es nach dem mehrdimensionalen Mittelwertsatz ein z auf dem Segment zwischen x und y (also $z = (1 - tx) + ty$ für ein $t \in [0, 1]$), so dass

$$f(y) - f(x) = D_z f(y - x).$$

Weil K konvex ist, ist $z \in K$. Weil K kompakt und f stetig differenzierbar ist, ist die Funktion $z \mapsto \partial_j f(z)$ für jede Koordinate $j = 1, \ldots, n$ durch eine Konstante $L > 0$ beschränkt. Es folgt:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| = |D_z f(y - x)| = \left| \sum_{j=1}^n \partial_j f(z)(y_j - x_j) \right| &\leq \sum_{j=1}^n |\partial_j f(z)||y_j - x_j| \\ \leq L \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| = L||y - x||_1 \leq nL||y - x||_\infty &\leq nL||y - x||_2 \end{aligned}$$

unabhängig von $x, y \in K$.

(c) Sei (X, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum und $T\colon X \to X$ Lipschitz mit Lipschitz-Konstante $0 < L < 1$ (eine *Kontraktion*). Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $x_0 \in X$ mit $T(x_0) = x_0$ (ein *Fixpunkt* von T).

(d) Sei $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante für f und sei $\lambda > L$. Dann ist die Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $g(x) = \frac{f(x)}{\lambda}$ eine Kontraktion:

$$||g(x) - g(y)|| = \left|\left|\frac{f(x) - f(y)}{\lambda}\right|\right| \leq \frac{1}{\lambda}||f(x) - f(y)|| \leq \frac{L}{\lambda}||x - y||$$

Mit Annahme ist $\frac{L}{\lambda} < 1$. Aus dem Banach-Fixpunktsatz folgern wir, dass es ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $g(x) = x$, und somit $f(x) = \lambda x$.

Punkteverteilung:

(a) 3 Punkte

1P Definition gleichmässig stetig

2P Wahl δ

(b) 9 Punkte

3P (A) Einschränkung auf kompakte Mengen

2P (B) Mittelwertsatz

1P (C) Ableitung ist beschränkt

3P (D) weitere Abschätzungen für Lipschitz-Stetigkeit

(c) 2 Punkte

(d) 6 Punkte

1P (A) Definition g

2P (B) g ist Lipschitz

1P (C) g ist eine Kontraktion

1P (D) Anwendung des Fixpunktsatzes

1P (E) Schlussfolgerung

Aufgabe 3. Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge. Sei $f_B \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$x \mapsto f_B(x) = \int_B (x \cdot y)^2 \,\mathrm{dvol}(y)$$

($x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ist das Standard-Skalarprodukt).

(a) Berechnen Sie f_W für den Würfel $W = [-1, 1]^3$

(b) Zeigen Sie: Ist das Innere von B nicht-leer, so ist $f_B(x) > 0$ für alle $x \neq 0$.

(c) B habe nicht-leeres Innere. Finden Sie eine Formel für die zweiten partiellen Ableitungen $h_{jk}(x) = \partial_j \partial_k f_B(x)$ von f_B und zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix $(h_{jk}(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ positiv definit ist.

Lösung:

(a) Mit Fubini gilt:

$$\begin{aligned}
f_W(x) &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\sum_{j=1}^{3} x_j y_j\right)^2 dy_1 dy_2 dy_3 \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_j y_j x_k y_k \, dy_1 dy_2 dy_3 \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_j y_j x_k y_k \, dy_1 dy_2 dy_3 \\
&= \sum_{j=1}^{3} x_j^2 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y_j^2 \, dy_1 dy_2 dy_3 + \sum_{j=1}^{3}\sum_{j \neq k=1}^{3} x_j x_j \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y_j y_k \, dy_1 dy_2 dy_3
\end{aligned}$$

Die Integrale sind

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y_j^2 \, dy_1 dy_2 dy_3 = 4 \int_{-1}^{1} y_j^2 \, dy_j = \frac{8}{3}$$

und

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y_j y_k \, dy_1 dy_2 dy_3 = 2 \int_{-1}^{1} y_j \, dy_j \int_{-1}^{1} y_k \, dy_k = 0$$

für $i \neq j$. Also folgt $f_W(x) = \frac{8(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{3} = \frac{8||x||^2}{3}$.

(b) Sei $x \neq 0$. Da der Integrand $(x \cdot y)^2 \geq 0$ ist, ist auch $f_B(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Die Menge $E = \{y \in B \,|\, (x \cdot y) = 0\}$ beschreibt die Vektoren $y \in B$, welche senkrecht zu $x \neq 0$ stehen, also eine Ebene geschnitten mit B. Dies ist eine Nullmenge (da zwei-dimensional). Da aber B nicht-leeres Inneres $\mathring{B}$ besitzt, gibt es einen Punkt $\tilde{y} \in \mathring{B}$, so dass $(x \cdot \tilde{y}) \neq 0$. Mit Stetigkeit der Abbildung $y \mapsto (x \cdot y)$, gibt es einen Ball B' um $\tilde{y}$ in $\mathring{B}$ und ein $c > 0$, so dass $|(x \cdot y)| \geq c > 0$ für alle $y \in B'$ gilt. Darum ist

$$f_B(x) = \int_B (x \cdot y)^2 \, \mathrm{dvol}(y) \geq \int_{B'} (x \cdot y)^2 \, \mathrm{dvol}(x) \geq \int_{B'} c^2 \, \mathrm{dvol}(x) = c^2 \, \mathrm{vol}(B') > 0.$$

(c) Wie in Teilaufgabe (a) gesehen ist $f_B(x) = x^T A_B x$ für A_B die symmetrische 3 Mal 3 Matrix mit Einträgen

$$a_{jk} = \int_B y_j y_k \, \mathrm{dvol}(y).$$

Die Hesse Matrix von f_B ist genau die symmetrische Matrix $(h_{jk}(x)) = A_B$ mit konstanten (nicht von x abhängenden) Einträgen. Ausserdem ist A_B positiv definit, da wir in Teilaufgabe b) gezeigt haben, dass $v^T A_B v = f_B(v) > 0$ für $v \neq 0$ ist.

Punkteverteilung:

(a) 7 Punkte

1P Fubini und Berechnung des Skalarproduktes

je 1P unbestimmte Integrale

je 1P bestimmte Integrale

(b) 7 Punkte

1P $(x \cdot y)^2 \geq 0$

1P $f_B \geq 0$

1P Stetigkeit von $y \mapsto (x \cdot y)^2$

4P $\int(B)$ offen, Benutzung von Stetigkeit, Abschätzungen, positives Volumen

(c) 6 Punkte

4P Berechnung Ableitungen

2P Beweis

Aufgabe 4. Sei $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ die n-te Partialsumme der harmonischen Reihe.

(a) Beweisen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n-1} H_k = n(H_n - 1)$ für alle $n = 2, 3, \ldots$.

(b) Beweisen Sie die Formel

$$H_n = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Hinweis: Die Eulersche Gamma-Funktion $\Gamma\colon x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ ist differenzierbar für $x > 0$ und erfüllt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Was ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(H_{2n} - H_n)$? Hinweis: Schreiben Sie $H_{2n} - H_n$ als Riemann-Summe.

(d) Beweisen Sie die Integralformel

$$H_n = \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Lösung:

(a) Umschreiben ergibt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} H_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} = \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{l} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{n-l}{l} \\ &= n\sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l} - (n-1) = n\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} - n = n(H_n - 1),\end{aligned}$$

wobei über die Indexmenge $\{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 1 \leq l \leq k \leq n-1\}$ in zwei verschiedenen Arten summiert wurde.

(b) Aus $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ folgt mit der Produktregel: $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. Wenden wir dies im Zähler und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ im Nenner an, erhalten wir

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(n) + n\Gamma'(n)}{n\Gamma(n)} = \frac{1}{n} + \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}.$$

Mehrmaliges Anwenden führt zu

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} &= \frac{1}{n} + \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{\Gamma'(n-1)}{\Gamma(n-1)} = \ldots \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = H_n + \Gamma'(1),\end{aligned}$$

da $\Gamma(1) = 0! = 1$.

(c) Dem Hinweis folgend ist:

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log(2).$$

für $n \to \infty$.

(d) $1 - x^n$ kann als $(1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1})$ faktorisiert werden. Darum gilt

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx = \int_0^1 (1 + x + \cdots + x^{n-1})\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n.$$

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

je 1P pro Rechnungsschritt

Alternativ per Induktion,

1P A2 Induktionsanfang

1P B2 Induktionsschritt

1P C2 Benutze Induktionsannahme

1P D2 Rechnung

1P E2 Folgerung

(b) 6 Punkte

2P F $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$.

2P GH $\dfrac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$

2P I Rekursiv schlussfolgern

(c) 5 Punkte

je 1P pro Schritt

(d) 4 Punkte

2pt geometrische Reihe

2pt Integral

Alternativ per Induktion,

1P O Induktionsanfang

1P P $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = x^n\Big(\dfrac{1}{1-x} - 1\Big)$

1P R $\int_0^1 \left(\frac{1-x^n}{1-x} + x^n\right)\, dx$

1P Q Schlussfolgerung mit Induktionsannahme

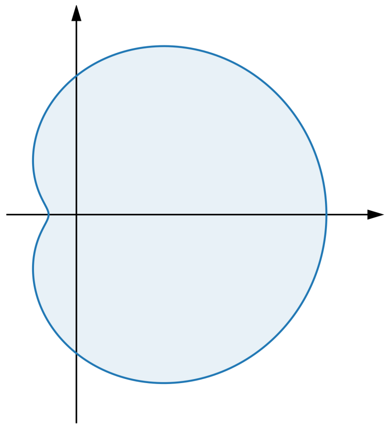
Aufgabe 5. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$. Sei C die Menge der Punkte in $\mathbb{R}^2$, deren Polarkoordinaten die Gleichung $r = g(\varphi)$ erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass C eine C^1-Parametrisierung $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ besitzt, so dass $\gamma'(\varphi) \neq 0$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ (Beweisen Sie, dass für Ihre Parametrisierung γ' wirklich nie Null ist).

(b) Begründen Sie die Formel $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{g(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2}\, d\varphi$ für die Bogenlänge von C.

(c) Leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt von der von C begrenzten beschränkten Fläche her.

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt aus (c) für $g(\varphi) = a\cos(\varphi) + b$ mit $0 < a < b$ (siehe Bild).



Die entsprechende Kurve C heisst Limaçon von Pascal (Étienne, dem Vater von Blaise).

Lösung:

(a) Sei $\gamma(\varphi) = (g(\varphi)\cos\varphi, g(\varphi)\sin\varphi)$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dann ist

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} g'(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi \\ g'(\varphi)\sin\varphi + g(\varphi)\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Falls $\gamma'(\varphi) = 0$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$ wäre, dann können wir $\sin\varphi$ bzw $\cos\varphi$ zu den beiden Koordinatengleichungen multiplizieren und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= g'(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi - g(\varphi)\sin^2\varphi \\ 0 &= g'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + g(\varphi)\cos^2\varphi \end{aligned}$$

und erhalten mit der Differenz der Gleichungen:

$$0 = g(\varphi)\cos^2 + g(\varphi)\sin^2\varphi = g(\varphi),$$

welches der Annahme $g > 0$ widerspricht.

(b) Die Länge der Kurve C ist definiert als $L = \int_0^{2\pi} ||\gamma'(t)||\, d\varphi$. Also:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(g'(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi)^2 + (g'(\varphi)\sin\varphi + g(\varphi)\cos\varphi)^2}\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{g(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2}\, d\varphi, \end{aligned}$$

wieder weil $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ist und die Mischterme sich aufheben.

(c) Eine mögliche Parametrisierung der Fläche ist: $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\Phi(r, \varphi) = (rg(\varphi)\cos\varphi, rg(\varphi)\sin\varphi)$, welche Differential

$$\begin{pmatrix} g(\varphi)\cos\varphi & rg'(\varphi)\cos\varphi - rg(\varphi)\sin\varphi \\ g(\varphi)\sin\varphi & rg'(\varphi)\sin\varphi + rg(\varphi)\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

und

$$\det\Phi(r, \varphi) = rg(\varphi)^2(\cos^2\varphi + \sin\varphi) = rg(\varphi)^2$$

hat Also ist die Fläche

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |\det\Phi(r, \varphi)|\, d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} rg(\varphi)^2\, d\varphi dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g(\varphi)^2\, d\varphi.$$

(d) Für $g(\varphi) = a\cos(\varphi) + b$ berechnet sich mit der in (c) hergeleiteten Formel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g(\varphi)^2\, d\varphi &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\varphi + 2ab\cos\varphi + b^2)\, d\varphi \\ &= \frac{\pi a^2}{2} + \pi b^2. \end{aligned}$$

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte

je 1P Parametrisierung und Ableitung

2P Widerspruch zur $\gamma' \neq 0$

(b) 5 Punkte

je 1P $L = \int ||\gamma'|| \, d\varphi$, Norm, Berechnung der Norm

2P Rechnung

(c) 6 Punkte

2P Parametrisierung der Fläche

1P Formel Volumen

1P Berechnung Determinante

2P Integral

(d) 5 Punkte

je 2P unbestimmtes und bestimmtes Integral

1P Schlussfolgerung