Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Giovanni Felder

24. Januar 2022

Analysis I & II Prüfung - Teil A

MATH — PHYS

Prüfungsnummer: **Legi:**

Anleitungen für Teil A (120 Minuten)

- Schreiben Sie alle Antworten auf diese Blätter, es werden keine weiteren Blätter eingesammelt! Falls Sie nicht genug Platz haben, nutzen Sie die Rückseite. Bitte lassen Sie diese Blätter zusammengeheftet.
- Sie dürfen Notizpapier verwenden.
- Falls Sie vor 10:15 fertig sind, legen Sie den Prüfungsteil A in das Kuvert zurück, und verlassen stillschweigend den Saal. Nach 10:15 bleiben Sie bitte bis zum Ende des ersten Prüfungsteils an Ihrem Platz.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle	Nr.	Punkte	Kontrolle
1	[8]		**6**	[8]	
2	[8]		**7**	[8]	
3	[8]		**8**	[8]	
4	[8]		**9**	[8]	
5	[8]		**10**	[8]	
Gesamtpunktzahl:	[80]				

Frage 1. Berechnen Sie (nur die Antwort zählt).

(a) $\int \cos(x^2)x\,dx$,

(b) $3 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^5} + \dfrac{1}{3^7} + \cdots$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x\log x)}{\cos(\pi x/2)}$,

(d) $\displaystyle\int_{B_1(0)} (x^2+y^2)\,dxdy$, wobei $B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2+y^2 \leq 1\}$.

Frage 2.

(a) Definieren Sie den Limes superior einer von oben beschränkten Folge in $\mathbb{R}$. Falls Sie dazu weitere Begriffe verwenden, z.B. Häufungspunkte oder Supremum, dann definieren Sie diese.

(b) Beweisen Sie: Falls alle Teilfolgen einer von oben beschränkten Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$ denselben Limes superior $s \in \mathbb{R}$ haben, dann gilt $s = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Frage 3. Geben Sie jeweils ein Beispiel einer reellwertigen Funktion an, oder begründen Sie, warum keine solche existiert:

(a) Eine bijektive Funktion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

(b) Eine bijektive Funktion $(-1, 1) \to \mathbb{R}$.

(c) Eine gleichmässig stetige, unbeschränkte Funktion $(-1, 1) \to \mathbb{R}$.

(d) Eine Riemann-integrierbare Funktion $[-1, 1] \to \mathbb{R}$, welche nicht stetig ist.

Frage 4. Finden Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung 4. Ordnung

$$y''''(x) + 2y(x) = x^3.$$

Frage 5. Berechnen Sie das Flussintegral $\int_S v \cdot n \, dA$ des Vektorfeldes

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + \log(1 + y^2 + z^2) \\ \\ y - \log(1 + x^2 + z^2) \\ \\ -z + \log(1 + x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

durch die Kugeloberfläche mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius R von innen nach aussen.

Frage 6.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 der Taylorreihe um $x = 0$ der Funktion

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + O(x^{n+1}).$$

(b) Finden Sie eine allgemeine Formel für a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ (eine richtige Lösung von (b) gibt die volle Punktzahl).

Frage 7.

(a) Ergänzen Sie: Ein nicht-leerer metrischer Raum X heisst *wegzusammenhängend*, falls ...

(b) Sei $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Zeigen Sie, dass die Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn $n \geq 2$.

Frage 8. Sei $n \geq 1$ und $A = \{x \in (0,1]^n \,|\, x_1 + \cdots + x_n = 1\}$. Sei die Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \log(x_i).$$

(a) Zeigen Sie, dass f genau einen kritischen Punkt p im Inneren von A besitzt und bestimmen Sie den Wert $f(p)$.

(b) Beweisen Sie, dass f auf A bei p ihr Minimum annimmt.

Frage 9. Sei $y(x) = \int_0^1 \cos(\pi x t^2)\, dt$. Beweisen Sie, dass y eine Lösung der Differenzialgleichung

$$2xy'(x) + y(x) = \cos(\pi x)$$

ist.

Hinweis: Partielle Integration.

Frage 10.

(a) Zeigen Sie: Die Gleichung

$$y = x^2 \arctan(f(x,y)) + f(x,y)$$

definiert eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass $f(x,0) = 0$ und berechnen Sie $\nabla f(x,0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Giovanni Felder

24. Januar 2022

Analysis I & II Prüfung - Teil B

MATH — PHYS

Prüfungsnummer: **Legi:**

Anleitungen für Teil B (120 Minuten)

- Lesen Sie alle fünf Aufgaben aufmerksam durch. Entscheiden Sie sich anschliessend für **eine** Aufgabe, die Sie **nicht** machen möchten.

Folgende Aufgabe mache ich nicht:

- Lösen Sie die anderen vier Aufgaben auf separaten Blättern. Bitte nummerieren Sie Ihre Blätter und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrer Nummer und Ihren Initialen.
- Am Ende der Prüfung legen Sie den Prüfungsteil Teil B mit Ihren Blättern ins Kuvert, bitte in der richtigen Reihenfolge. Es werden keine losen Blätter eingesammelt.
- Kleben Sie das Kuvert NICHT zu.

Bitte folgende Tabelle nicht ausfüllen!

Nr.	Punkte	Kontrolle
	[20]	
	[20]	
	[20]	
	[20]	

Gesamtpunktzahl:	[80]

Aufgabe 1. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit reellen Koeffizienten habe Konvergenzradius 1. Sei D die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe konvergiert.

(a) Welche sind die möglichen D? Geben Sie ein Beispiel einer Potenzreihe für jede Möglichkeit.

(b) Nehmen wir zusätzlich an, dass $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$? Begründen Sie.

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$? Begründen Sie.

(d) Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen $a_n \geq 0$, die gegen 0 konvergiert. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $z = i$ und $z = -i$ konvergiert ($i = \sqrt{-1}$).

Aufgabe 2. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen metrischen Räumen (M, d_M), (N, d_N) heisst Lipschitz-stetig, falls es ein $L > 0$ gibt, so dass $d_N(f(x), f(y)) \leq L\, d_M(x, y)$ für alle $x, y \in M$.

(a) Zeigen Sie, dass Lipschitz-stetige Abbildungen gleichmässig stetig sind.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Beweisen Sie: Die Einschränkung von f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig bezüglich der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

(c) Formulieren Sie den Banach-Fixpunktsatz.

(d) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie: Für alle hinreichend grossen $\lambda > 0$ hat die Gleichung

$$f(x) = \lambda x$$

eine eindeutige Lösung x.

Aufgabe 3. Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge. Sei $f_B \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$x \mapsto f_B(x) = \int_B (x \cdot y)^2 \,\mathrm{dvol}(y)$$

($x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ ist das Standard-Skalarprodukt).

(a) Berechnen Sie f_W für den Würfel $W = [-1, 1]^3$

(b) Zeigen Sie: Ist das Innere von B nicht-leer, so ist $f_B(x) > 0$ für alle $x \neq 0$.

(c) B habe nicht-leeres Innere. Finden Sie eine Formel für die zweiten partiellen Ableitungen $h_{jk}(x) = \partial_j \partial_k f_B(x)$ von f_B und zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix $(h_{jk}(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ positiv definit ist.

Aufgabe 4. Sei $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ die n-te Partialsumme der harmonischen Reihe.

(a) Beweisen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n-1} H_k = n(H_n - 1)$ für alle $n = 2, 3, \ldots$.

(b) Beweisen Sie die Formel

$$H_n = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Hinweis: Die Eulersche Gamma-Funktion $\Gamma\colon x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ ist differenzierbar für $x > 0$ und erfüllt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Was ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(H_{2n} - H_n)$? Hinweis: Schreiben Sie $H_{2n} - H_n$ als Riemann-Summe.

(d) Beweisen Sie die Integralformel

$$H_n = \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

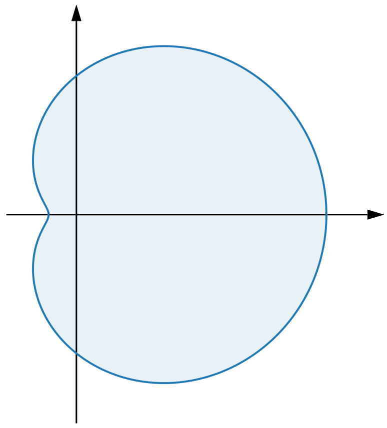
Aufgabe 5. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$. Sei C die Menge der Punkte in $\mathbb{R}^2$, deren Polarkoordinaten die Gleichung $r = g(\varphi)$ erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass C eine C^1-Parametrisierung $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ besitzt, so dass $\gamma'(\varphi) \neq 0$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ (Beweisen Sie, dass für Ihre Parametrisierung γ' wirklich nie Null ist).

(b) Begründen Sie die Formel $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{g(\varphi)^2 + g'(\varphi)^2}\, d\varphi$ für die Bogenlänge von C.

(c) Leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt von der von C begrenzten beschränkten Fläche her.

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt aus (c) für $g(\varphi) = a\cos(\varphi) + b$ mit $0 < a < b$ (siehe Bild).



Die entsprechende Kurve C heisst Limaçon von Pascal (Étienne, dem Vater von Blaise).