

Serie 2

Besprechung: Di. 09.03. / Mi. 10.03, in den Übungsgruppen

Koordinatoren: Bei Fragen zu den Übungen kontaktieren Sie bitte

- Francesca Bartolucci francesca.bartolucci@sam.math.ethz.ch
- Luc Grosheintz luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch

Webpage: <http://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-1662-10L>

1. Konvergenzraten der summierten Quadraturregeln

Wir wollen die folgende Quadraturregeln *zusammengesetzte Mittelpunkregel*, *zusammengesetzte Trapezregel* und *zusammengesetzte Simpsonregel* verwenden, um das Integral

$$I = \int_0^1 f_i(x) dx$$

von $f_i(x)$, $i = 1, 2$, auf N Teilintervallen oder mit n Funktionsauswertungen zu berechnen. Die beiden Funktionen sind durch

$$f_1(x) := \frac{1}{1 + 5x^2} \quad f_2(x) := \sqrt{x}. \quad (1)$$

gegeben.

- Implementieren Sie die Funktionen $f_i(x)$, $i \in \{1, 2\}$.
- Implementieren Sie die Funktionen `mittelpunkt(f,a,b,N)`, `trapezoid(f,a,b,N)` und `simpson(f,a,b,N)`. Dabei sollen die Funktion `f`, welche integriert werden soll, die untere und obere Grenze `a` und `b` und die Anzahl `N` der Teilintervalle in der zusammengesetzten Regel eingegeben werden. Jede Funktion soll die Approximation von I ausgeben. *Hinweis:* Sie können das Template `quadrature.py` verwenden. Rufen Sie die zu implementierende Funktion doch gleich auf, dann sehen Sie sofort ob Ihre Implementation plausibel ist.
- Vervollständigen Sie die Funktion `quadrature_error(quadrature_rule, f, exact)`: Dabei sollen die Quadraturregel `quadrature_rule`, die integrierende Funktion `f` und der genaue Wert Ihres Integrals `exact` eingegeben werden. Die Funktion `quadrature_error` soll den Fehler `error` und die Anzahl der Teilintervalle `n_chunks = 2k`, wobei $k \in \{3, \dots, 10\}$, ausgeben. **Tipp:** Die Funktion `enumerate` kann nützlich sein.
- Testen Sie den Code: Zwei Plots sollen generiert werden, die die Konvergenzraten zeigen. Welche Methode verwendet man sinnvollerweise?
- Ändern Sie den Code, um einen weiteren Plot zu generieren, der die Konvergenz jeder Quadraturregel unter Berechnung des Integrals der Funktion

$$f(x) = x^5(1 - x^4) \quad (2)$$

zeigt.

Bitte wenden!

2. Homogen geladenes Quadrat in kartesischen Koordinaten

Betrachten Sie ein quadratisches Gebiet in der x - y -Ebene, welches eine konstante elektrische Ladungsdichte ρ_0 aufweist:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_0, & (x, y) \in [-1, 1]^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das elektrostatische Potential φ an einem Punkt (x_p, y_p) ausserhalb des geladenen Quadrats ist dann durch Integration über die geladene Region gegeben

$$\varphi(x_p, y_p) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}} dx dy.$$

Der Einfachheit halber setzen Sie $\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} = 1$.

Implementieren Sie die Trapez- und die Simpson-Regel in zwei Dimensionen und berechnen Sie dann $\varphi(x_p, y_p)$ für $x_p = y_p = 2, 10, 20$. Schauen Sie sich den Fehler genau an. Was ist erstaunlich daran? Wie erklären sie sich dieses Verhalten?

Hinweis: Verwenden Sie das Template `potential.py`