Serie 3

Besprechung: Di. 16.03. / Mi. 17.03, in den Übungsgruppen

Koordinatoren: Bei Fragen zu den Übungen kontaktieren Sie bitte

- Francesca Bartolucci `francesca.bartolucci@sam.math.ethz.ch`
- Luc Grosheintz `luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch`

Webpage: `http://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-1662-10L`

1. *Gauss-Legendre Quadratur*

a) Verwenden Sie folgende Quadraturregeln

- zusammengesetzte Mittelpunktsregel
- zusammengesetzte Trapezregel
- zusammengesetzte Simpsonregel
- Gauss-Legendre Quadratur
- zusammengesetzte Gauss-Legendre Quadratur

um das Integral

$$I = \int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x$$

von $f_i(x)$ auf N Teilintervallen oder mit n Funktionsauswertungen zu berechnen. (Die genauen Werte von N und n stehen im Template.) Die beiden Funktionen sind gebeben durch

$$f_1(x) := \frac{1}{1+5x^2} \qquad f_2(x) := \sqrt{x}\,.$$

Berechnen Sie den Fehler und plotten Sie die Konvergenzraten. Welche Methode verwendet man sinnvollerweise?

Hinweis: Verwenden Sie das Template `gauss_legendre.py`

Hinweis: Die Quadraturpunkte und -gewichte können mittels der Funktion `gauss_legendre_rule` in `gauss_legendre_rule.py` berechnet werden.

b) Wie viele Funktionsauswertungen braucht die h-adaptive Strategie von Code 1.4.2 für die beiden Funktionen $f_i(x)$? Plotten Sie die erzeugten Gitter.

Hinweis: Modifizieren Sie den Code so, dass er alle erzeugten Gitter zurück gibt.

Bitte wenden!

2. ***Kernaufgabe:*** *Quadratur*

Aufgabenstellung

Sei

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - a\sin(2\pi t - 1)}}$$

Hinweis: In `kernaufgabe.py` finden Sie ein minimales Template.

a) Plotten Sie in einem Bild der Fehler der (nicht-zusammengesetzter) Gauss-Quadratur und der zussammengesetzten Trapezregel für die Parameter $a \in \{0.5, 0.9, 0.95, 0.99\}$ gegen der Anzahl Funktionsauswetungen für den Integrationsgebiet $[0, \frac{1}{2}]$ und in einem anderen Bild für den Integrationsgebiet $[0, 1]$.

Hinweis: Sie können den Parameter a als ein weiteres Argument `args=(a,)` an Ihrer Quadraturformel mitgeben, wie im Beispiel der Vorlesung. Für fortgeschrittene Python-Kenner: sie dürfen die Funktion als Klasse mit dem Parameter a definieren.

b) Erklären Sie den Verlauf jeder Konvergenzkurve. Welche Methode erscheint Ihnen als die besser geeignet, im Licht dieses Experiments?

3. *Lobatto-Quadratur [Prüfungsaufgabe 2019]*

Lobatto-Quadraturformeln besitzen die maximale Ordnung unter jenen Quadraturformeln, die die Intervallendpunkte als Knoten haben:

$(b_i, c_i)_{i=1}^s$ mit $c_1 = 0$, $c_s = 1$ der Ordnung $2s - 2$.

a) Geben Sie die Lobatto-Quadraturformeln der Ordnungen 2 und 4 an ($s = 2$ und $s = 3$).

b) Berechnen Sie die Knoten und Gewichte der Lobatto-Quadraturformel der Ordnung 6 ($s = 4$).

Hinweis: Die Berechnung vereinfacht sich, wenn Sie verwenden, dass die gesuchte Quadraturformel symmetrisch ist.

4. *Quadraturformeln [Prüfungsaufgabe 2020]*

Sei die Quadraturformel auf $[-1, 1]$ gegeben durch die Knoten und Gewichte der Datei `quadrature_formula.py`.

a) Welche Ordnung hat diese Quadraturformel? Schreiben Sie ein Programm, mit dem Sie Ihre Antwort begründen.

b) Zu welcher Klasse von Quadraturformeln gehört diese Quadraturformel? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Schreiben Sie ein Programm, das eine auf diesen Knoten und Gewichten basierte zusammengestetzte Quadraturformel berechnet. Wenden Sie dies für die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)^2}, \qquad f_2(x) = 0.03x^{2/3}$$

Siehe nächstes Blatt!

auf dem Intervall $[0, 3]$ an. Plotten Sie die Fehler in doppellogarithmischer Skala. Die exakten Werte der zwei Integrale sind im Template `quadrature_formula.py` gegeben.

Welche Ordnungen beobachten Sie für die zwei Fehler? Plotten Sie auf dem Bild mit den Fehlern die Graphen der Polynome, die diesen zwei beobachteten und der erwarteten Ordnungen entsprechen.

d) Begründen Sie auf Papier das beobachtete oder erwartete Verhalten der Fehler in den zwei Fällen.