Serie 4

Besprechung: Di. 23.03. / Mi. 24.03, in den Übungsgruppen

Koordinatoren: Bei Fragen zu den Übungen kontaktieren Sie bitte

- Francesca Bartolucci `francesca.bartolucci@sam.math.ethz.ch`
- Luc Grosheintz `luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch`

Webpage: `http://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-1662-10L`

1. Kernaufgabe: *Pendelgleichung*

Aufgabenstellung

Wir betrachten die Gleichung für den Auslenkungswinkel $\alpha(t)$ im mathematischen Pendel der Länge l im Erdgraviationsfeld (wir notieren $\omega^2 = \frac{g}{l}$):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) &= -\omega^2 \sin\alpha(t) \qquad (1)\\ \alpha(0) &= \alpha_0 \\ \dot{\alpha}(0) &= \dot{\alpha}_0 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung (1) in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= f_0(y_0, y_1) \qquad (2)\\ \dot{y}_1 &= f_1(y_0, y_1) \qquad (3)\\ y_0(0) &= \alpha_0 \\ y_1(0) &= \dot{\alpha}_0\,. \end{aligned}$$

Für welche physikalische Grösse steht hier y_1?

b) Skizzieren Sie Ihren Code auf Papier. Benutzten Sie diese Skizze um den Code zu planen. Sie sollten sich überlegen welche Bausteine in den ODE-Lösern verwendet werden. Wie unterscheidet sich das explizite Eulerverfahren vom impliziten Verfahren. Was haben die beiden gemeinsam? Wie passt das velocity-Verlet Verfahren zu Ihren Bausteinen?

c) Implementieren Sie folgende Verfahren:

- Explizites Eulerverfahren
- Implizites Eulerverfahren
- Implizite Mittelpunktsregel
- Velocity-Verlet Verfahren

Alle Funktionen sollen die rechte Seite der ODE, den Startwert, die Endzeit und die Anzahl der Schritte als Parameter akzeptieren, z.B:

```python
def explict_euler(rhs, y0, T, N):
    # Implementieren Sie hier das explizite Eulerverfahren.
```

Hinweis 1. Lösen Sie die auftretenden nicht-linearen Gleichungssysteme $F(y) = 0$ mit `scipy.optimize.fsolve`.

Hinweis 2. Auf der Vorlesungshomepage stehen Templates für die Serie bereit. Für diese Aufgabe können Sie `pendulum.py` verwenden.

d) Testen Sie Ihren Code für $g = 9.81$, $l = 0.6$, $T = 0.2$.. Bestimmen Sie die Konvergenzordnung von

$$|y_N - y(T)| \tag{4}$$

und vergleichen Sie diese mit der theoretischen Konvergenzordnung.

Hinweis. Benutzen Sie die Funktion `reference_solver` um eine hervorragende Approximation von $y(T)$ zu berechnen.

e) Implementieren Sie den konkreten Fall $g = 9.81$, $l = 0.6$, $T = 4.0$, $N = 500$, $\alpha_0 = 1.4855$, $\dot{\alpha}_0 = 0$. Ploten Sie alle Trajektorien in einem Bild mit den Koordinaten $\alpha, \dot{\alpha}$. Ploten Sie ein Bild der Evolution der (Approximationen der) kinetischen ($\frac{1}{2}\dot{\alpha}(t)^2$), potentiellen ($\omega^2(1 - \cos(\alpha(t)))$) und totalen Energie im System (Energie gegen Zeit) für jede Methode. Bleibt die totale Energie immer erhalten? Stimmen die vorausgesagten Perioden überein? Welche liegt der Realität am nächsten?

Hinweis. Das Template für diese Aufgabe ist `pendulum.py`

f) Messen Sie die Laufzeit der vier Methoden. Welche Methode ist am effizientesten?

2. *Trajektorie bei Streuung (Prüfungsaufgabe FS 13)*

Die Trajektorie eines Teilchens bei Streuung an einem Potential $U(x, y)$ wird beschrieben durch:

$$\ddot{\underline{r}} = -\nabla U$$

wobei $\underline{r} = (x, y)^{\mathrm{T}}$ die Teilchenkoordinaten sind und U das Lennard-Jones Potential:

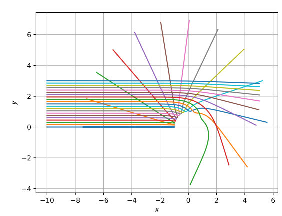
$$U(x, y) = 4\left(\left(\frac{1}{r}\right)^{12} - \left(\frac{1}{r}\right)^{6}\right)$$

ist und $r^2 = x^2 + y^2$.

a) Plotten Sie die Teilchen-Trajektorien, die sich mit dem Störmer-Verlet Verfahren ergeben.

b) Verwenden Sie folgende Anfangsbedingungen und Parameter:

- $\underline{r}(t = 0) = (-10, b)^{\mathrm{T}}$, wobei $b = 0.15, 0.3, 0.45, \ldots, 3$,
- $\dot{\underline{r}}(t = 0) = (1, 0)^{\mathrm{T}}$,
- Zeitschritt $\Delta t = 0.02$,
- Endzeit $T_{\text{ende}} = 15$.



Hinweis: Benutzen Sie das Template `lennard_jones.py`