Serie 5

Abgabedatum: **Di. 13.04. / Mi. 14.04** (nach Ostern), in den Übungsgruppen

Koordinatoren: Bei Fragen zu den Übungen kontaktieren Sie bitte

- Francesca Bartolucci `francesca.bartolucci@sam.math.ethz.ch`
- Luc Grosheintz `luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch`

Webpage: `http://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-1662-10L`

1. Kernaufgabe: Das N-Körper Problem

Modellierung der Physik

Wir betrachten N Körper im dreidimensionalen Raum. Ihre Dynamik unterliegt einzig der Gravitation, beschrieben durch das Newtonsche Gesetz. Jeder Körper K_i hat eine Position $\underline{q_i} \in \mathbb{R}^3$ und einen Impuls $\underline{p_i} \in \mathbb{R}^3$ sowie eine Masse m_i. Zur einfachen Behandlung der N Körper fassen wir deren Positionen $\underline{q_i}$ und Impulse $\underline{p_i}$ in Vektoren zusammen:

$$\underline{q} := [\underline{q_1}|\dots|\underline{q_N}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3N}$$
$$\underline{p} := [\underline{p_1}|\dots|\underline{p_N}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3N}\,.$$

Die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(\underline{q},\underline{p})$ lautet dann:

$$\mathcal{H}\left(\underline{q},\underline{p}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\underline{p_i}^{\mathrm{T}}\underline{p_i} - G\sum_{1\le i<j\le N}\frac{m_i m_j}{\|\underline{q_j}-\underline{q_i}\|}$$

Aus dieser Funktion erhält man die Bewegungsgleichungen durch partielles ableiten:

$$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} =: \dot{\underline{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}}$$
$$\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} =: \dot{\underline{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}}\,.$$

Wir finden hier also:

$$\dot{\underline{q_k}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p_k}} = \frac{\partial}{\partial \underline{p_k}}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\underline{p_i}^{\mathrm{T}}\underline{p_i} = \frac{1}{m_k}\underline{p_k}$$

und:

$$\dot{\underline{p_k}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q_k}} = \frac{\partial}{\partial \underline{q_k}} G\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{m_i m_j}{\|\underline{q_j}-\underline{q_i}\|} = G\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}\frac{m_i m_k}{\|\underline{q_i}-\underline{q_k}\|^3}\left(\underline{q_i}-\underline{q_k}\right)\,.$$

Schliesslich fasst man noch die Positionen $\underline{q}$ und Impulse $\underline{p}$ in einen einzigen grossen Vektor $\underline{y} := [\underline{q}|\underline{p}]^{\mathrm{T}}$ zusammen.

Bitte wenden!

Mathematisches Modell

Aus obiger Herleitung bekommt man ein System von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\underline{\dot{y}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{\dot{q}}(t) \\ \underline{\dot{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \end{bmatrix} = f\left(t, \underline{y}\right)$$

mit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{6N} \to \mathbb{R}^{6N}$ welches wir nun mit den Polygonzugverfahren aus der Vorlesung lösen wollen.

Aufgabenstellung

a) Implementieren Sie, z.B. mithilfe früherer Aufgaben, das explizite und implizite Eulerverfahren, die implizite Mittelpunktsregel und das Velocity-Verlet.

b) Implementieren Sie mithilfe obiger Formeln die Funktion $f(\underline{y})$ korrekt für N Körper.

Hinweis: Benutzen Sie das `Python` Template `nbody.py`

c) Implementieren Sie eine mit dem velocity-Verlet Verfahren kompatible Version der rechten Seite. Achten Sie dabei auf die Verwendung korrekter Input-Werte.

d) Testen Sie die Implementation am Zweikörperproblem mit folgenden Anfangswerten. Massen: $m_1 = 500$, $m_2 = 1$, Positionen: $\underline{q_1} = \underline{0}$, $\underline{q_2} = (2, 0, 0)$, Impulse: $\underline{p_1} = \underline{0}$, $\underline{p_2} = (0, \sqrt{\frac{Gm_1}{2}}, 0)$ und $G = 1$. Das Ende der Simulation sei bei $T = 3$ und es sollen 5000 Zeitschritte gemacht werden. Plotten Sie die Bahnen der Körper in der x-y Ebene. Vergleichen Sie die benötigten Rechenzeiten der verschiedenen Methoden.

e) Als nächstes wollen wir ein Dreikörperproblem betrachten. Im Allgemeinen ist das Dreikörperproblem nicht analytisch lösbar. Untersuchen Sie numerisch die Dynamik mit den gegebenen Anfangswerten. Massen: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Positionen und Impulse:

$$\begin{aligned} \underline{q_1} &= (0.97000436, -0.24308753, 0) & \underline{p_1} &= (0.46620368, 0.43236573, 0) \\ \underline{q_2} &= (-0.97000436, 0.24308753, 0) & \underline{p_2} &= (0.46620368, 0.43236573, 0) \\ \underline{q_3} &= (0, 0, 0) & \underline{p_3} &= (-0.93240737, -0.86473146, 0)\,. \end{aligned}$$

Auch hier nehmen wir $G = 1$. Das Ende der Simulation sei $T = 2$ simuliert und es sollen 1000 Zeitschritte mit dem velocity-Verlet und der impliziten Mittelpunktsregel gemacht werden. Plotten Sie die Bahnen der drei Körper in der x-y Ebene.[a]

f) Abschliessend wollen wir die Bahnen der Planeten[b] des äusseren Sonnensystems untersuchen. Dazu integrieren wir ihre Bewegungsgleichungen ausgehend von konkreten Anfangswerten. Diese Werte sind im `Python` Template zur Aufgabe notiert und alle Einheiten sind im astronomischen Einheitensystem (Längen in A.U., Massen relativ zur Sonne und Zeit in Tagen). Hier nehmen wir $G = 2.95912208286 \cdot 10^{-4}$. Mit jeder Methode sollen 2000 Zeitschritte gemacht werden. Die Simulation soll bis $T = 20000$ laufen. Plotten Sie die Planetenbahnen in der x-y Ebene. (Die Berechnung mit den impliziten Methoden dauert eine Weile.)

[a] Dieses sehr spezielle Bewegungsmuster ist als *figure-eight pattern* bekannt und detailliert beschrieben im Paper *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses* von Alain Chenciner und Richard Montgomery, zu finden unter http://arxiv.org/abs/math/0011268

[b] Pluto ist offiziell zwar kein Planet mehr, wir wollen ihn hier dennoch berücksichtigen.

Siehe nächstes Blatt!

2. *Simples Splittingverfahren*

Die folgende ODE beschreibt die Drehung und das gleichzeitige Schrumpfen eines Vektors in $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{d}{dt}\underline{y} = \frac{dR}{dt} \cdot R^{-1} \cdot \underline{y} + b\,\underline{y} \tag{1}$$

mit $b = -0.1$ und der Rotationsmatrix

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta t & -\sin\theta t \\ \sin\theta t & \cos\theta t. \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Identifizieren Sie die Rotations- und Streckungsterme in der ODE. Splitten Sie die ODE in die zwei Terme.

b) Lösen Sie die beiden ODEs, welche Sie durch das Splitting erhalten haben, analytisch.

Hinweis: Die beiden Terme haben eine klare geometrische Bedeutung. Nutzen Sie dies aus um analytische Lösungen zu finden.

c) Implementieren Sie das Strang-Splittingverfahren und integrieren Sie die ODE mit dem Startwert $\underline{y} = (1, 0)$ bis $t = 100$.

Hinweis: Implementieren Sie autonome Lösungsoperatoren.

Hinweis: Verwenden Sie das Template `simple_splitting.py`.

3. *Teilchen im Gravitationsfeld einer Punktmasse*

Bewegungsgleichungen können oft als Hamiltonisches System

$$\dot{\underline{q}} = \nabla_{\underline{p}} \cdot H(\underline{p}, \underline{q}) \tag{3}$$

$$\dot{\underline{p}} = -\nabla_{\underline{q}} \cdot H(\underline{p}, \underline{q}) \tag{4}$$

geschrieben werden. Für ein Teilchen im Gravitationsfeld der Sonne gilt

$$H = 1/2m \; \|\underline{p}\|^2 + U(\underline{q})$$

wobei

$$U(\underline{q}) = U(q) = -\frac{G\,M}{q}.$$

Wir setzen $G = M = m = 1$.

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen eines Teilchens im Gravitationsfeld einer Punktmasse her. Verwenden Sie die Newtonschen Gesetze. Vergewissern Sie sich, dass (3) mit der von Ihnen hergeleiteten ODE übereinstimmt.

b) Spalten Sie den Hamiltonian in zwei Teile $T(\underline{p})$ und $V(\underline{q})$. Welchen physikalischen Grössen ensprechen T und V?

c) Schreiben Sie die beiden ODEs, welche durch das Splitting entstehen, auf und lösen Sie beide analytisch.

Bitte wenden!

d) Implementieren Sie Strang-Splitting oder eines der vielen Splittingverfahren aus Code 2.4.9 im Skript, die Parameter finden Sie auch in `splitting_parameters.py`.

e) Integrieren Sie (3) mit Startwert $p(0) = (0, 1)$, $q(0) = (1, 0)$ bis zur Zeit $t = 50$.

Plotten Sie q_2-q_1, p-q sowie $H - t$, $T - t$ und $V - t$. Die letzten drei Grössen plotten Sie am besten in einem Plot.

- Versuchen Sie andere Startwerte.
- Untersuchen Sie das Langzeitverhalten.
- Probieren Sie auch ganz kleine Schrittweiten aus.

4. Kernaufgabe: Pendel mit Reibung und externer Kraft

Modellierung der Physik

Wir betrachten das mathematische Pendel, welches durch folgende Gleichung ($l = g = 1$) beschrieben ist:

$$\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = F(t) \tag{5}$$

mit externer Kraft:

$$F(t) = A\sin(\omega t) \tag{6}$$

mit Frequenz $\omega = 1.3$, Amplitude $A = 1$ und Reibung $\mu = 0$ bzw. $\mu = 0.1$. Verwenden Sie die Anfangswerte $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$.

a) Lösen Sie (5) mit Runge-Kutta, z.B. via `scipy.integrate.solve_ivp`.

b) Lösen Sie (5) mit den Splitting-Verfahren `SS`, `PRKS6`, `Y61`, `KL8`.

Hinweis: Sie finden die Parameter der verschiedenen Splittingverfahren in `splitting_parameters.py`.

c) Plotten Sie die Auslenkung $\varphi(t)$ und die Trajektorien im Phasenraum $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$.
Hinweis: Verwenden Sie das Template `pendulum.py`.