Serie 6

Abgabedatum: Di. 20.04. / Mi. 21.04, in den Übungsgruppen

Koordinatoren: Bei Fragen zu den Übungen kontaktieren Sie bitte

- Francesca Bartolucci `francesca.bartolucci@sam.math.ethz.ch`
- Luc Grosheintz `luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch`

Webpage: http://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-1662-10L

1. Kernaufgabe Runge–Kutta-Methoden I

Modellierung der Physik

Hinweis: Diese Kernaufgabe besitzt kein Template.

a) Schreiben Sie das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel als Runge–Kutta-Verfahren; geben Sie die entsprechenden Butcher-Tabellen an und erklären Sie die Herleitung jeder diesen Methoden als Runge–Kutta-Verfahren im Sinne der Vorlesung.

b) Programmieren Sie die Methoden von (a) als Runge–Kutta-Verfahren. Verwenden Sie diese um jeweils eine numerische Approximation der Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y(t) - 2\sin(t)\,, \qquad t \in [0,4]\,, \\ y(0) &= 1\,, \end{aligned}$$

mit $N = 100$ gleich grossen Zeitschritten zu berechnen und zu ploten. Verwenden Sie Ihren Code um die entsprechenden Konvergenzordungen dieser drei Methoden empirisch zu finden. Die exakte Lösung ist $y(t) = \cos(t) + \sin(t)$.

2. *Runge–Kutta-Methoden II*

Gegeben ist das klassische Runge–Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

a) Implementieren Sie dieses Runge–Kutta-Verfahren für allgemeine Systeme erster Ordnung.

Hinweis: Verwende das Template `runge_kutta.py`.

Bitte wenden!

b) Verwenden Sie das Programm aus Aufgabenteil a), um das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 101y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1, \end{cases} \tag{1}$$

mit exakter Lösung:

$$y(t) = e^{-t} \cdot \cos(10t) \tag{2}$$

approximativ innerhalb des Intervalls $t \in [0, 3]$ zu lösen. Überführen Sie dazu zunächst die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung. Wählen Sie eine geeignete Schrittweite h und plotten Sie sowohl die Näherungs- als auch die exakte Lösung.

Hinweis: Schreiben Sie ein MainFile, das das Python Code `runge_kutta.py` benutzt.

c) Ermitteln Sie empirisch, d.h. mit numerischen Experimenten und geeigneten Konvergenzplots, die Konvergenzordnung dieses Verfahrens für das gegebene Problem.