Serie 7

Abgabedatum: Di. 27.04. / Mi. 28.04, in den Übungsgruppen

Koordinatoren: Bei Fragen zu den Übungen kontaktieren Sie bitte

- Francesca Bartolucci `francesca.bartolucci@sam.math.ethz.ch`
- Luc Grosheintz `luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch`

Webpage: `http://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-1662-10L`

1. *Airy-Gleichung*

Es soll die sogenannte Airy-Gleichung

$$\ddot{u}(t) - t\,u(t) = 0$$

numerisch gelöst werden wobei folgende Anfangswerte zum Zeitpunkt $T_{start} = 0$ gegeben sind

$$u(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})} \approx 0.3550280539,$$
$$\dot{u}(0) = -\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})} \approx -0.2588194038$$

und rückwärts in der Zeit integriert wird bis zu $T_{end} = -40$. Dieses Anfangswertproblem definiert die Airy-Funktion $\mathrm{Ai}(t)$ welche in der Physik eine grosse Bedeutung hat.

a) Schreiben Sie die Gleichung um in ein System erster Ordnung für $y(t)$ und leiten Sie daraus die rechte Seite her. Implementieren Sie die rechte Seite in der Funktion `rhs` welche t und $y(t)$ als Argumente hat.

Hinweis: Verwenden Sie das Template `airy.py`

b) Implementieren Sie das explizite und das implizite Euler-Verfahren, die explizite und die implizite Mittelpunktsregel als allgemeine Runge–Kutta-Methoden mit dem jeweiligen Butcher-Schema.

Hinweis: Benutzen Sie den Wrapper `nicer_fsolve` für Funktion `fsolve` aus `scipy.optimize`.

c) Lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem mit einer Runge–Kutta-3/8-Zeitintegration. Implementieren Sie dafür die Funktion `RK_38` und plotten Sie die Lösung.

Hinweis: Das Butcher-Schema der Runge–Kutta-3/8-Regel lautet

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/3 & 1/3 & & & \\
2/3 & -1/3 & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8
\end{array}$$

Das 3/8-Butcher-Schema in dem Programm ist repräsentiert wie eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

2. *Pendelsgleichung mit partizioniertem Runge–Kutta-Verfahren*

Berechnen Sie eine numerische Approximation der Lösung des mathematischen Pendels ohne Reibung und ohne äussere Kraft für grosse Zeiten ($T = 400$) mittels einem symplektischen partitionierten Runge–Kutta-Verfahrens der Ordnung 6. Überprüfen Sie diese Konvergenzordnung mit einem Plot eines numerischen Experiments. Plotten Sie in einem Plot den zeitlichen Verlauf der Abweichung der Energie für verschiedene Schrittweiten.

3. *N-Körperproblem mittels Splittingverfahren*

Kombinieren Sie die Lösungen der Aufgaben 5.3 und 5.1 um die Aufgabe 5.1 mittels folgenden Splitting-Methoden zu lösen: 'S2', 'PRKS6', 'BM42', 'BM63'.