

Serie 8

Abgabedatum: Di. 4.05. / Mi. 5.05, in den Übungsgruppen

Koordinatoren: Bei Fragen zu den Übungen kontaktieren Sie bitte

- Francesca Bartolucci francesca.bartolucci@sam.math.ethz.ch
- Luc Grosheintz luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch

Webpage: <http://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-1662-10L>

1. *Stabile Integration*

Zur Problematik der stabilen Integration betrachten wir das lineare homogene Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}u'(x) &= 998u(x) + 1998v(x), \\v'(x) &= -999u(x) - 1999v(x)\end{aligned}$$

mit Anfangswerten $u(0) = 1$ und $v(0) = 0$.

- Bestimmen Sie die analytische Lösung der obigen Anfangswertaufgabe.
- Das obige System soll nun mittels expliziter und impliziter Euler-Methode im Intervall $[0, 2]$ gelöst werden. Worauf muss bei der jeweiligen Methode bei der Wahl der Schrittweiten h geachtet werden? Falls die Schrittweite Beschränkt ist, geben Sie die maximal zulässige an. Implementieren Sie die explizite und die implizite Euler-Methode und überprüfen Sie die Richtigkeit der Aussagen, indem Sie das obige System numerisch lösen.

2. *Stabilitätsfunktion*

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der impliziten Mittelpunktsregel. Zeigen Sie, dass $|S(z)| \leq 1$ ist, genau dann wenn $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ gilt.

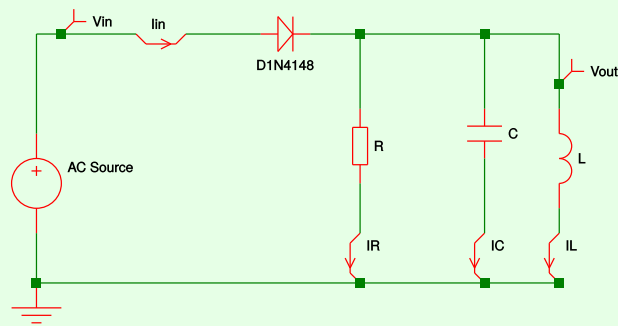
Hinweis: Es gilt $|z|^2 = z\bar{z}$, wobei \bar{z} das Konjugiertkomplexe $\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$ ist.

3. **Kernaufgabe: Schaltkreissimulation**

Modellierung der Physik

Wir betrachten im Folgenden eine einfache elektronische Schaltung.

Bitte wenden!



Der Plan zeigt eine Schaltung bestehend aus einer Standarddiode (D 1N4148), sowie Widerstand R , Kapazität (Kondensator) C und Induktivität (Spule) L . Eingezeichnet sind auch die Messpunkte V_{in} und V_{out} für Spannungen sowie I_{in} , I_R , I_C und I_L für Ströme. Die Schaltung ist an eine Wechselspannungsquelle (AC) mit $V_{in}(t)$ angeschlossen. Gesucht ist die Ausgangsspannung $V_{out}(t)$ relativ zur Erdung.

Mathematisches Modell

Aus der Problemstellung ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 V_{in} &= V_D + V_{out} \\
 I_D - I_R - I_C - I_L &= 0 \\
 V_{out} &= V_C = V_R = V_L \\
 V_R &= RI_R \\
 I_C &= C\dot{V}_C \\
 V_L &= L\dot{I}_L \\
 I_D &= I_S \left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

wobei der Verlauf der Eingangsspannung $V_{in} = V_0 \sin(2\pi ft)$ mit $V_0 = 5 \text{ V}$ und $f = 50 \text{ Hz}$, die Parameter $n = 1$, $I_S = 1 \text{ nA}$, $V_T = 25 \text{ mV}$ der Diode sowie der Widerstand $R = 100 \text{ k}\Omega$, die Induktivität $L = 50 \text{ mH}$ und die Kapazität $C = 10 \text{ nF}$ bekannt sind.

Siehe nächstes Blatt!

Aufgabenstellung

- a) Leiten Sie eine (nicht-lineare) Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Strom $I_L(t)$, der durch die Induktivität (Spule) fließt, her.

Hinweis: Starten Sie mit Gleichung (1) und versuchen Sie, alle Ströme durch I_L auszudrücken.

- b) Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe der impliziten Mittelpunktsregel mit 12001 Zeitschritten und Endzeit $T = 30 \times 10^{-3}$ s. Als Anfangswerte sollen $I_L(0) = 0$ und $\dot{I}_L(0) = 0$ verwendet werden. Messen Sie die für die Integration benötigte Rechenzeit^a.

Hinweis: Verwenden Sie das Template `circuit.py`

- c) Implementieren Sie ein allgemeines *implizites* Runge–Kutta-Verfahren mit s Stufen. Der Code soll möglichst generell geschrieben sein und mit beliebigen Butcher-Schemata als Input funktionieren.

Hinweis: Die k_i sollen in einen grossen Vektor $\underline{k} := [k_1 | \dots | k_s]^T$ verpackt werden. Dies vereinfacht das Lösen der nicht-linearen Gleichungen.

Hinweis: Verwenden Sie das Template `runge_kutta.py`

- d) Benutzen Sie folgende Gauss-Kollokations-Methode der Ordnung 6 um die gegebene Gleichung zu lösen. Das Butcher Schema sei:

$$\begin{array}{c|ccc}
 \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} & \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30} \\
 \frac{1}{2} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24} & \frac{2}{9} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24} \\
 \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30} & \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} \\
 \hline
 & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18}
 \end{array}$$

und hat 3 Stufen. Verwenden Sie wiederum 12001 Zeitschritte und die Endzeit $T = 30 \times 10^{-3}$ s. Als Anfangswerte sollen $I_L(0) = 0$ und $\dot{I}_L(0) = 0$ verwendet werden. Messen Sie die für die Integration benötigte Rechenzeit.

- e) Berechnen und plotten Sie jeweils die Spannungen $V_{in}(t)$ und $V_{out}(t)$ gegen die Zeit. Plotten Sie auch den Bereich von 16 ms bis 21 ms separat.
- f) Berechnen und plotten Sie jeweils die Ströme $I_D = I_{in}$, I_R , I_C und I_L die durch die verschiedenen Bauteile fließen. Plotten Sie I_C und I_L im Bereich von 16 ms bis 21 ms separat.
- g) Ist die numerische Lösung der Differentialgleichung korrekt?
- h) Lösen Sie die Aufgabe mit dem `ode45` Verfahren und vergleichen Sie die Resultate. Die anfängliche Schrittweite soll $2e-5$ sein. Verwenden Sie eine relative und eine absolute Toleranz von je $1e-8$. Messen Sie die für die Integration benötigte Rechenzeit.
- i) Ist die Differentialgleichung steif? Begründen Sie ob die gewählten Lösungsverfahren geeignet sind? Welche Lösungsverfahren sollte man anderenfalls verwenden?

^aDas `time` Modul bietet entsprechende Funktionen.

<https://docs.python.org/2/library/time.html#time.clock>

4. *Modifizierte Euler Verfahren (Prüfung FS19)*

a) Begründen Sie das modifizierte explizite Euler-Verfahren

$$\begin{aligned}w &= y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) \\y_{n+1} &= y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, w\right)\end{aligned}\tag{2}$$

und das modifizierte implizite Euler-Verfahren

$$\begin{aligned}w &= y_n + \frac{h}{2}f\left(t_n + \frac{h}{2}, w\right) \\y_{n+1} &= y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, w\right)\end{aligned}\tag{3}$$

als Polygonzugverfahren zur numerischen Lösung einer gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\dot{y} = f(t, y).$$

- b) Beweisen Sie, dass das modifizierte implizite Euler-Verfahren identisch mit der impliziten Mittelpunktsregel ist.
- c) Finden Sie die Stabilitätsfunktionen der beiden modifizierten Euler-Verfahren.
- d) Bestimmen Sie empirisch die Konvergenzrate der beiden Euler-Verfahren indem Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y} = -\sin(t) + \lambda(y - \cos(t)), \quad t \in [0, 2]\tag{4}$$

mit dem Startwert $y(0) = 1$ bis zur Endzeit $T = 2$ für $\lambda = -10$ lösen. Die exakte Lösung ist $y(t) = \cos(t)$.

- e) Betrachten Sie die mit dem modifizierten expliziten und modifizierten impliziten Euler Verfahren berechneten Lösungen dieser Gleichung für $\lambda = -2100$ mit N äquidistanten Schritten bis zur Endzeit $T = 2$.
1. Plotten Sie die zwei Lösungen für $N = 1000$ und erklären Sie das beobachtete Verhalten,
 2. Ab welchem N beobachten Sie einen Fehler zur Endzeit $T = 2$ kleiner als 10^{-4} für beide Verfahren?