

Serie 9

Abgabedatum: Di. 11.05. / Mi. 12.05, in den Übungsgruppen

Koordinatoren: Bei Fragen zu den Übungen kontaktieren Sie bitte

- Francesca Bartolucci francesca.bartolucci@sam.math.ethz.ch
- Luc Grosheintz luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch

Webpage: <http://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-1662-10L>

1. Kernaufgabe: Anfangsamplitude eines Pendels zu gegebener Periode

Modellierung der Physik

Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels (Reibung vernachlässigt) der Länge l ist eine nicht-lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung und das zugehörige Anfangswertproblem ist

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin(\phi), \quad \phi(0) = \phi_0 \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad \dot{\phi}(0) = 0,$$

wobei $\phi(t)$ der Winkel des Pendels in Bezug zur vertikalen Richtung und g die Gravitationskonstante ist. Für grosse Amplituden ist die Periode T eine Funktion des Anfangswertes. Man kann eine Formel für $T(\phi_0)$ wie folgt herleiten. Wir betrachten die gesamte Energie des Pendels, welche in der Zeitentwicklung erhalten bleiben muss

$$\underbrace{mgl(1 - \cos \phi_0)}_{E_0=E(0)} = \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl(1 - \cos \phi)}_{E(t)}.$$

Auflösen dieser Gleichung nach $\dot{\phi}$ ergibt

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \phi - \cos \phi_0)}$$

und per Integration nach t bekommt man die Periode

$$T(\phi_0) = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} d\phi.$$

Dieses Integral ist singularär bei $\phi = \phi_0$ und numerisch schwierig zu berechnen. Deshalb wendet man erst die Substitution $\cos \phi = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$ und dann die Variabeltransformation $\sin \theta = \frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})}$ an und bekommt

$$T(\phi_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}}_{:=K(k)} d\theta. \quad (1)$$

Bitte wenden!

wobei $k := \sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right)$ und $|\phi_0| < \pi$. Das bestimmte Integral $K(k)$ ist gerade die Definition einer wohlbekannten speziellen Funktion: das *vollständige elliptische Integral erster Art*.

Mathematisches Modell

Wir betrachten in dieser Aufgabe das nicht-lineare Anfangswertproblem.

Bestimmen Sie den Anfangswinkel ϕ_0 , so dass $T = 1.8$ s die Periode der Lösung ist.

Die Parameter sind $l = 0.6$ m und $g = 9.81$ ms⁻². Aufgrund der Symmetrie passiert das Pendel in jedem Fall bei $t = \frac{T}{4}$ und $t = \frac{3T}{4}$ seinen tiefsten Punkt. Daher können wir das Problem folgendermassen formulieren:

Bestimmen Sie $\phi_0 > 0$, so dass für die Lösung $t \mapsto \phi(t)$ $\phi(0.45) = 0$ gilt.

Aufgabenstellung

- Schreiben Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung als ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.
- Schreiben Sie eine Python Funktion `simulate_pendulum` die den Integrator `solve_ivp` benutzt, um die Pendelgleichung mit den Parametern l und g zu lösen. Schreiben Sie ein Interface `solve_for_final_angle` welches sich für die Nullstellensuche in d) eignet.
- Lösen Sie das Anfangswertproblem auf $[0, t_{\text{end}}]$ für die beiden gegebenen Anfangswerte $\phi_0 = 0.8\frac{\pi}{2}$ und $\phi_0 = 0.99\frac{\pi}{2}$. Plotten Sie in beiden Fällen den zeitlichen Verlauf von ϕ und $\dot{\phi}$. Verifizieren Sie, dass die Periode der Lösung für den ersten Startwert kleiner und für den zweiten Startwert grösser als $T = 1.8$ s ist.
- Die Funktion F sei nun mithilfe der Lösung $\phi(t)$ definiert als

$$F(\phi_0) := \phi(0.45).$$

Verwenden Sie die Python Funktion `fsolve` aus dem Modul `scipy.optimize` um die Nullstelle von $F(\phi_0)$ zu bestimmen^a. Plotten Sie die Lösung und verifizieren Sie, dass die numerische Lösung tatsächlich die Periode $T = 1.8$ s hat.

- Anstelle einer numerischen Approximation der Lösung $\phi(t)$ der Differentialgleichung kann auch die Formel (1) in der Definition der Funktion F verwendet werden

$$F(\phi_0) := \frac{1}{4}T(\phi_0) - 0.45.$$

Bestimmen Sie wiederum die Nullstelle von F . Das elliptische Integral $K(k)$ soll mittels einer zusammengesetzten Simpson Quadraturregel auf 10 Intervallen approximiert werden.

- Eine wesentlich effizientere Methode zur Berechnung der Funktion $K(k)$ verwendet das arithmetisch-geometrische Mittel $\text{agm}(x, y)$ zweier Zahlen. Es berechnet sich

Siehe nächstes Blatt!

iterativ wie folgt: $x_0 := x$, $y_0 := y$ und

$$x_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}$$
$$y_{n+1} := \sqrt{x_n y_n}.$$

Im Limit $n \rightarrow \infty$ gilt $x_n = y_n = \operatorname{agm}(x, y)$. Das elliptische Integral lässt sich nun schreiben als

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} d\xi = K(k) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{agm}(1 - k, 1 + k)}.$$

Verwenden Sie diese Iteration zur Approximation von $T(\phi_0)$ und bestimmen Sie die Nullstelle von F . Aufgrund der guten Konvergenz sind nur sehr wenige Iterationen notwendig. Für diese Berechnung hier reichen 5, da stets $0 < k < 1$.

Hinweis: Verwenden Sie das Template `pendulum.py`.

^a F ist stetig und steigend auf $[0.8\pi/2, 0.99\pi/2]$ (grössere Anfangswerte sind längere Perioden) daher hat F auf diesem Intervall eine eindeutige Nullstelle.

2. Nichtlineares System

(Diese Aufgabe besitzt kein Template)

Das nichtlineare Gleichungssystem

$$e^{xy} + x^2 + y - \frac{6}{5} = 0$$
$$x^2 + y^2 + x - \frac{11}{20} = 0$$

ist zu lösen.

- Implementieren Sie hierzu ein Newton-Verfahren in Python und lösen Sie damit obiges System mit den Startwerten $x = \frac{3}{5}$ und $y = \frac{1}{2}$ bis auf eine Toleranz von 10^{-14} .
- Untersuchen Sie die beobachtete Konvergenzordnung für folgende Startwerte:

- $x = \frac{3}{5}$ und $y = \frac{1}{2}$
- $x = \frac{2}{5}$ und $y = \frac{1}{4}$
- $x = -\frac{23}{5}$ und $y = \frac{41}{5}$.

Vergleichen Sie die beobachtete Konvergenzordnung mit der theoretischen.

3. Broyden Verfahren

Schreiben Sie Code, der die Plots aus dem Beispiel 3.9.2 (Broyden-Quasi-Newton-Verfahren: Konvergenz) und Beispiel 3.9.5 (Broyden-Verfahren für ein grosses nicht-lineares System), reproduziert.

Implementieren Sie zusätzlich auch die teurere Version des Broyden-Verfahren und plotten Sie diese ebenfalls.

Hinweis: Diese Aufgabe besitzt kein Template.