Serie 10

Lösbarkeit durch Radikale, Norm

1. Zeigen Sie, dass $L|\mathbb{Q}$ eine radikale Körpererweiterung ist.
   (a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{1+\sqrt{3}})$
   (b) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}, \sqrt[7]{\sqrt{2}+\sqrt{3}})$

2. Sei $E|K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(E|K)$. Für $x \in E$ ist die *Norm* N von x als
$$N(x) := \prod_{\sigma \in G} \sigma(x)$$
definiert. Zeigen Sie, dass
   (a) $N(E) \subset K$, und
   (b) $N(xy) = N(x)N(y)$.

   Berechnen Sie N für $E = \mathbb{Q}(i)$ und $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als Körpererweiterungen von $K = \mathbb{Q}$.

3. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen durch Radikale lösbar sind (ohne diese zu lösen):
   (a) $X^4 - 2X^2 - 21 = 0$,
   (b) $X^6 - 2X^3 - 2 = 0$.

4. Zeigen Sie, dass $X^5 - p^2X - p \in \mathbb{Q}[X]$ mit p prim nicht durch Radikale lösbar ist.

5. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe von
$$f(X) = (X^2+4)(X-2)(X-4)\cdots(X-2(p-2)) + 2 \in \mathbb{Q}(X)$$
mit p prim gleich S_p ist.

6. (Hilbert 90) Angenommen $E|K$ ist eine (endliche) Galoiserweiterung mit $G := \mathrm{Gal}(E|K)$ zyklisch. Sei $\sigma \in G$ ein Erzeuger. Zeigen Sie, dass $N(u) = 1$ genau dann, wenn ein $z \in E^\times$ existiert mit $z\sigma(z)^{-1} = u$.

   Hinweis für $\Longrightarrow$: Sei $G = \{\mathrm{id}, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}\}$. Definieren Sie $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$, so dass $\sigma(\delta_i) = u^{-1}\delta_{i+1}$ für $0 \leqslant i \leqslant n-2$ und $\delta_{n-1} = 1$. Wählen Sie $y \in E$ und definieren Sie $z := \delta_0 y + \delta_1\sigma(y) + \ldots + \delta_{n-1}\sigma^{n-1}(y)$.