Serie 11

Kreisteilungspolynome

1. Berechnen Sie die Zerlegung in irreduzible Faktoren von $\Phi_7(X)$ in $\mathbb{F}_{29}[X]$, wobei $\Phi_n(X)$ das n-te Kreisteilungspolynom bezeichnet.

2. Seien p eine ungerade Primzahl und $r \geqslant 1$. Zeigen Sie, dass
$$(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \cong \left(\mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z}\right) \times (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})\,.$$
Ist diese Gruppe zyklisch?

3. Zeigen Sie, dass
$$\Phi_n(X) = \prod_{d|n} (X^{n/d} - 1)^{\mu(d)},$$
wobei $\mu : \mathbb{N}^\times \to \{-1, 0, 1\}$ die Möbiusfunktion bezeichnet.

4. Seien $E = \mathbb{F}_p(X, Y)$ und $K = \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$. Zeigen Sie, dass
   (a) $[E : K] = p^2$, und
   (b) $f^p \in K$ für alle $f \in E$.

   Folgern Sie, dass $E|K$ keine einfache Körpererweiterung ist.

5. Sei p eine Primzahl mit $\mathrm{ggT}(p, n) = 1$. Zeigen Sie, dass
$$\Phi_{pn}(X) = \frac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)}.$$

6. Sei p eine Primzahl mit $\mathrm{ggT}(p, n) = 1$. Zeigen Sie, dass die monischen irreduziblen Faktoren von $\Phi_n(X)$ in $\mathbb{F}_p[X]$ verschieden sind, den gleichen Grad haben und, dass dieser gerade gleich der Ordnung von $p \bmod n$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ist.