Serie 12

Kreisteilungspolynome

1. Sei p eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie, dass es genau eine Zwischenerweiterung $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{Q}[p]$ gibt mit $[L : \mathbb{Q}] = 2$.

2. Zeigen Sie, dass $\Phi_8(X) = X^4 + 1$ gilt, und dass Φ_8 reduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ für jede Primzahl p ist.

3. Zeigen Sie, dass
$$(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \big(\mathbb{Z}/2^{r-2}\mathbb{Z}\big)$$
für $r \geqslant 2$.

4. Sei $f \in K[X]$ ein separables Polynom, $g \in K[X]$ ein irreduzibler Faktor sowie $K \subset L \subset F$, wobei F bzw. L ein Zerfällungskörper von f bzw. g sind. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(F|K)$ transitiv auf $R(g)$ wirkt.

5. Sei p eine Primzahl und $r \geqslant 1$. Zeigen Sie, dass
$$\Phi_{p^r}(T) = \frac{T^{(p^r)} - 1}{T^{(p^{r-1})} - 1}.$$

6. Zeigen Sie, dass $\Phi_{p^r}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

   Hinweis: Wenden Sie das Eisensteinkriterium auf $\Phi_{p^r}(X + 1)$ an.