D-MATH Algebra II FS21
Prof. Marc Burger

Serie 2

Separabilität und Berechnung von Galoisgruppen

1. Sei K ein Körper und $L|K$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass falls $f \in K[X]$ separabel ist, dann ist f separabel in $L[X]$.

2. Welche der folgenden Polynome sind separabel?

   (a) $f(X) = X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$,

   (b) $g(X) = X^n - a \in K[X]$ für $n \geqslant 2$, K ein Körper und $a \in K$,

   (c) $h(X) = X^p - Y \in \mathbb{F}_p(Y)[X]$ für eine Primzahl p.

3. Sei $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom und $L = K(\alpha)$ eine Körpererweiterung von K, wobei α eine Nullstelle von f in einem Zerfällungskörper von f ist. Angenommen es gibt eine Nullstelle β von f in L. Zeigen Sie, dass ein $\varphi \in \mathrm{Gal}(L \,|\, K)$ mit $\varphi(\alpha) = \beta$ existiert.

4. Sei $f \in K[X]$ und sei $E|K$ ein Zerfällungskörper von f. Wir wollen zeigen, dass f keine mehrfache Nullstelle in E hat, genau dann, wenn $\mathrm{ggT}_{K[X]}(f, f') = 1$.

   (a) Sei $F|K$ eine Körpererweiterung und $f, g \in K[X]$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}_{K[X]}(f, g) = 1$, genau dann, wenn $\mathrm{ggT}_{F[X]}(f, g) = 1$.

   (b) Schreiben Sie $f = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ in $E[X]$. Verifizieren Sie, dass
   $$\prod_{i=1}^n f'(\alpha_i) = \pm \left(\prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j) \right)^2 .$$

   (c) Folgern Sie die Aussage mithilfe der obigen Schritte.

5. Sei p eine Primzahl. Betrachten Sie das Polynom $\varphi_p := \frac{X^p - 1}{X - 1} \in \mathbb{Q}[X]$ und sei $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Sei E ein Zerfällungskörper von φ_p.

   (a) Zeigen Sie, dass φ_p irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist und folgern Sie, dass φ_p das Minimalpolynom von ζ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $E = \mathbb{Q}(\zeta)$.

   (c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(E \,|\, \mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

6. Sei $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

   (a) Zeigen Sie, dass $[E : \mathbb{Q}] = 4$.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(E \,|\, \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.