D-MATH | Algebra II | FS21

Prof. Marc Burger

Serie 3

Körpererweiterungen und Zerfällungskörper

1. Es seien $a, b \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen für die $f = X^2 + a$ und $g = X^2 + b$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ sind. Zeigen Sie, dass die Zerfällungskörper von f und g genau dann isomorph sind, wenn $\frac{a}{b}$ ein Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist.

2. Sei p eine Primzahl ungleich 2 und 5. Zeigen Sie, dass von den natürlichen Zahlen, die nur Einsen in ihrer Dezimaldarstellung haben, d.h. 1, 11, 111, 1111, ..., mindestens eine durch p teilbar ist.

3. Seien $L_1|K_1$ und $L_2|K_2$ zwei endliche Körpererweiterungen und $\varphi : L_1 \to L_2$ ein Isomorphismus von Körpern mit $\varphi(K_1) = K_2$. Zeigen Sie, dass $[L_1 : K_1] = [L_2 : K_2]$.

4. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass
$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$
indem Sie $X^{p-1} - 1$ über $\mathbb{F}_p$ faktorisieren.

5. Sei $f = X^3 - X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$.
   (a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $\mathbb{F}_3[X]$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass falls E ein Zerfällungskörper von f ist und $\rho \in E$ eine Nullstelle von f, so auch $\rho + 1$ und $\rho - 1$.
   (c) Konstruieren Sie einen Zerfällungskörper von f und berechnen Sie explizit das Produkt zweier beliebiger Elemente in diesem Zerfällungskörper.
   (d) Beschreiben Sie explizit die Wirkung von $\mathrm{Gal}(E|\mathbb{F}_3)$ auf die Elemente von E.

6. Sei p eine Primzahl.
   (a) Zeigen Sie, dass ein Element der Ordnung p in S_p ein p-Zykel ist.
   (b) Zeigen Sie, dass eine Transposition und ein p-Zykel S_p erzeugen.