Serie 4

Symmetrische Gruppen und normale Körpererweiterungen

1. Sei $f \in K[X]$ ein monisches Polynom, das in K in Linearfaktoren zerfällt. Angenommen $\sigma \in \operatorname{Aut}(K)$ fixiert jede Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass σ die Koeffizienten von f fixiert.

2. Zeigen Sie, dass S_2, S_3 und S_4 auflösbar sind.

3. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und $L|K$ eine endliche Körpererweiterung, so dass $\deg(f)$ und $[L : K]$ koprim sind. Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $L[X]$ ist.

4. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$ der folgenden Körpererweiterung: $L = \mathbb{F}_2(X)$, $K = \mathbb{F}_2(X^2)$.

5. Sei G eine Gruppe, die auf eine Menge X mit mindestens zwei Elementen wirkt. Die Wirkung heisst *zweifach transitiv*, falls für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$ ein $g \in G$ mit $g \cdot x_1 = y_1$ und $g \cdot x_2 = y_2$ existiert. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

   (a) S_n wirkt zweifach transitiv auf $\{1, \dots, n\}$ für jedes $n \geqslant 2$.

   (b) A_n wirkt zweifach transitiv auf $\{1, \dots, n\}$ für jedes $n \geqslant 4$.

6. Sei $E|K$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $E|K$ normal ist genau dann, wenn alle irreduziblen Polynome in $K[X]$, die eine Nullstelle in E haben, bereits in E in Linearfaktoren zerfallen.

   Hinweis: Angenommen E ist ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$ und $p \in K[X]$ ist ein irreduzibles Polynom mit $p(\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in E$. Betrachten Sie die Körpererweiterung $L|E$, wobei L ein Zerfällungskörper von $f \cdot p$ ist.