D-MATH | Algebra II | FS21
Prof. Marc Burger

Serie 5

Radikale Körpererweiterungen

1. Sei $f = X^3+X^2+2X+\frac{7}{27} \in \mathbb{Q}[X]$. Konstruieren Sie eine radikale Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, die einen Zerfällungskörper von f enthält.

2. Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein Polynom von Grad p prim und E ein Zerfällungskörper von f. Zeigen Sie, dass falls $\mathrm{Gal}(E|K)$ zyklisch von Ordnung p ist, dann ist f irreduzibel.

3. Bestimmen Sie für jedes der folgenden Polynome die Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers.
   (a) $X^5 + \frac{5}{4}X^4 - \frac{5}{21} \in \mathbb{Q}[X]$
   (b) $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$
   (c) $X^{81} - t \in \mathbb{F}_3(t)[X]$

4. Sei $E|K$ ein Zerfällungskörper von $f \in K[X]$. Wir betrachten eine Körpererweiterung K' von K und einen Zerfällungskörper E' von f über K'. Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(E'|K')$. Zeigen Sie, dass $\sigma(E) = E$ und, dass der resultierende Gruppenhomomorphismus
$$\mathrm{Gal}(E'|K') \to \mathrm{Gal}(E|K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_E$$
   injektiv ist.

5. Seien $E|K$ und $E'|K$ Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$. Zeigen Sie, dass falls E in einer radikalen Körpererweiterung von K enthalten ist, so ist auch E' in einer radikalen Körpererweiterung von K enthalten.

6. Zeigen Sie, dass falls E ein endlicher Körper ist und $K \subset E$ ein Unterkörper, dann ist $\mathrm{Gal}(E|K)$ zyklisch.