Serie 6

Zyklische und auflösbare Gruppen

1. Zeigen Sie, dass eine nicht-triviale endliche auflösbare Gruppe eine normale Untergruppe von Index p für eine Primzahl p hat.

2. Sei K ein Körper und $n \geqslant 1$. Zeigen Sie, dass die Gruppe (bzgl. Multiplikation) der oberen invertierbaren Dreiecksmatrizen

$$T(n, K) := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \leqslant \mathrm{GL}(n, K)$$

auflösbar ist.

3. Sei $f \in k[X]$ ein Polynom. Sei $K|k$ eine normale Körpererweiterung und $L|K$ ein Zerfällungskörper von f aufgefasst als Polynom in $K[X]$. Zeigen Sie, dass $L|k$ normal ist.

4. Sei C_d die zyklische Gruppe der Ordnung $d \geqslant 1$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(C_d)$ isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ der Einheiten des Rings $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ist.

5. Sei $Q < \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ die von

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Bestimmen Sie die Ordnung von Q. Ist Q auflösbar?

6. Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung n zyklisch ist genau dann, wenn für jeden Teiler d von n höchstens eine zyklische Untergruppe der Ordnung d existiert. Schliessen Sie daraus, dass jede endliche Untergruppe der mulitlikativen Gruppe eines Körpers zyklisch ist.