Serie 8

Symmetrische Funktionen

1. Seien $E|K$ eine endliche Körpererweiterung, $G := \mathrm{Gal}(E|K)$ und wir betrachten ein Element $\alpha \in E$. Zeigen Sie, dass das Polynom
$$q(X) := \prod_{\sigma \in G/\mathrm{Stab}_G(\alpha)} (X - \sigma(\alpha)) \in E[X]$$
ein Element von $E^G[X]$ ist.

2. Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ separabel und $\deg(f) = 5$. Sei E ein Zerfällungskörper von f. Angenommen f is durch Radikale lösbar, zeigen Sie, dass $[E : K] < 60$ gilt.

3. Seien K ein Körper, $f \in K[X]$ und E ein Zerfällungskörper von f. Angenommen $f = g \cdot h$ in $K[X]$. Seien B und C Zerfällungskörper von g und h, die in E enthalten sind. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(E|B)$ und $\mathrm{Gal}(E|C)$ in $\mathrm{Gal}(E|K)$ kommutieren.

4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $|K| = \infty$. Zeigen Sie, dass V nicht die endliche Vereinigung von echten Untervektorräumen ist.

5. Seien E ein Körper, S eine Menge und $F(S, E)$ der Raum der Funktionen auf S mit Werten in E. Seien $\{f_1, \dots, f_n\} \subset F(S, E)$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass $s_1, \dots, s_n \in S$ existieren, so dass
$$\begin{pmatrix} f_1(s_1) \\ \vdots \\ f_n(s_1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} f_1(s_n) \\ \vdots \\ f_n(s_n) \end{pmatrix}$$
linear unabhängig in E^n sind.

6. Sei K ein Körper, $E = K(y_1, \dots, y_n)$, $F = K(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1})$, wobei $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ die elementarsymmetrischen Polynome in $y_1, \dots, y_n$ sind. Zeigen Sie mit Hilfe von Theorem II.17, dass
$$E^{S_n} = F.$$
Folgern Sie daraus, dass jede symmetrische rationale Funktion eine rationale Funktion in den elementarsymmetrischen Polynomen ist.

Hinweis: Siehe den Beweis des Satzes von Abel-Ruffini.