D-MATH | Algebra II | FS21
Prof. Marc Burger

Serie 9

Galoiskorrespondenz

1. Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein Polynom mit verschiedenen Nullstellen und E ein Zerfällungskörper von f. Wir schreiben $R(f) = \{z_1, \ldots, z_n\}$ und sehen $\mathrm{Gal}(E|K) \leqslant S_n$. Wir definieren die *Diskriminante von f* als
$$D(f) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2.$$
   (a) Angenommen die Charakteristik von K ist nicht 2. Zeigen Sie, dass $D(f)$ ein Quadrat in K ist, genau dann, wenn $\mathrm{Gal}(E|K) \leqslant A_n$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_4|\mathbb{F}_2$ ein Gegenbeispiel in Charakteristik 2 zu Teil (a) ist.

2. Welche der folgenden Körpererweiterungen $L|K$ sind Galois?
   (a) $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,
   (b) $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$,
   (c) $K = \mathbb{Q}(X^2)$ und $L = \mathbb{Q}(X)$,
   (d) $K = \mathbb{F}_2(X^2 + X)$ und $L = \mathbb{F}_2(X)$.

3. Berechnen Sie für die folgenden Körpererweiterungen $L|K$ die Menge $\mathrm{Sub}(\mathrm{Gal}(L|K))$ und die entsprechenden Zwischenkörper.
   (a) $K = \mathbb{Q}$ und L ist der Zerfällungskörper des Polynoms $(X^2 - 2)(X^2 - 3)$,
   (b) $K = \mathbb{Q}$ und L ist der Zerfällungskörper des Polynoms $X^5 - 1$.

4. Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Falls die Körpererweiterungen $L|M$ und $M|K$ beide Galois sind, so ist auch $L|K$ Galois.

Sei K ein Körper. Für jedes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$ definiert
$$\sigma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P(X) := P\left(\frac{dX - b}{-cX + a}\right)$$
für $P \in K(X)$ einen Automorphismus in $\mathrm{Gal}(K(X)|K)$. Die Abbildung
$$\sigma : \mathrm{GL}_2(K) \to \mathrm{Gal}(K(X)|K)$$
ist ein Homomorphismus.

5. Sei $G := \sigma\left(\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_3^\times, b \in \mathbb{F}_3\right\}\right) \leqslant \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_3(X)|\mathbb{F}_3)$. Finden Sie $\mathbb{F}_3(X)^G$, $\mathrm{Sub}(G)$ und alle Zwischenerweiterungen $\mathbb{F}_3(X)|\mathbb{F}_3(X)^G$.

6. Zeigen Sie, dass
$$\sigma : \mathrm{GL}_2(K) \to \mathrm{Gal}(K(X)|K)$$
einen Isomorphismus
$$\mathrm{PGL}_2(K) \cong \mathrm{Gal}(K(X)|K)$$
induziert. Hier bezeichnet $\mathrm{PGL}_2(K)$ den Quotienten von $\mathrm{GL}_2(K)$ bezüglich
$$Z = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in K^\times\right\}.$$